Correction du Devoir Maison n° 17

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : x_n est défini et est positif.

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $x_0 = 0$ donc est bien défini, et positif.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire x_k est défini et est positif.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

x_k étant défini et positif, $x_k + 4 \neq 0$ donc $\frac{2x_k+3}{x_k+4}$ existe, autrement dit x_{k+1} est bien défini.
De plus, $x_k \geqslant 0$ donc $x_k + 4 > 0$ et $2x_k + 3 \geqslant 0$ donc le quotient est positif, c'est-à-dire x_{k+1} positif.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est bien vérifiée.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ est défini et est positif}}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{2x_n+3}{x_n+4}-1}{\frac{2x_n+3}{x_n+4}+3} = \dfrac{2x_n+3-(x_n+4)}{2x_n+3+3(x_n+4)} = \dfrac{x_n-1}{5x_n+15} = \dfrac{x_n-1}{5(x_n+3)} = \frac{1}{5}z_n.$

Donc $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{5}}$.

3. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 \times \frac{1}{5^n} = \frac{0-1}{0+3}\frac{1}{5^n} = \boxed{-\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}}$.

Donc $\dfrac{x_n-1}{x_n+3} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}$ donc $x_n - 1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}\big(x_n+3\big)$ donc $x_n + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}x_n = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n} \times 3.$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{-\frac{1}{5^n}+1}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}}}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ car $5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{5^n} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n} = 1.$
Donc par quotient, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } 1}$.

Exercice 2.

Attention : *il faut ici faire preuve de rigueur, U_n et u_n sont des objets différents.*
U_n est une matrice, alors que u_n est un nombre, le terme de rang n de la suite (u_n) que l'on étudie.
Il faut donc s'appliquer dans l'écriture, afin qu'il n'y ait aucun doute à la lecture (et dans le raisonnement) sur l'objet mentionné.
Idem sur u_{n+1} et $u_n + 1$!

1. (a) $AU_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ 1u_{n+1} + 0u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = AU_n}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $U_n = A^nU_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $A^0U_0 = IU_0 = U_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $U_k = A^kU_0$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $U_k = A^kU_0$.
On multiplie cette égalité par A à gauche : $AU_k = AA^kU_0 = A^{k+1}U_0$.
Or, d'après la question précédente, $AU_k = U_{k+1}$, donc $U_{k+1} = A^{k+1}U_0$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = A^nU_0}$.

2. (a) $AP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 - \frac{1}{4}\times 2 & 1\times 2 - \frac{1}{4}\times 0 \\ 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$PT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times \frac{1}{2} + 2\times 0 & 1\times 1 + 2\times \frac{1}{2} \\ 2\times \frac{1}{2} + 0\times 0 & 2\times 1 + 0\times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{AP = PT}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: $A^nP = PT^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0P = IP = P$ et $PT^0 = PI = P$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $A^kP = PT^k$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $A^kP = PT^k$: on multiplie cette égalité par A à gauche, on obtient $AA^kP = APT^k$ soit $A^{k+1}P = APT^k$.
Or $AP = PT$ donc $A^{k+1}P = PTT^k = PT^{k+1}$: l'égalité est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^nP = PT^n}$.

❀❀ **3. (a)** $B = T - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Et $B^2 = B\times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Alors, pour tout k plus grand que 2, $B^k = B^2 \times B^{k-2} = (0)_2 \times B^{k-2} = (0)_2$. Donc $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 2,\ B^k = \mathbf{0}}$.

❀❀ **(b)** $T = B + \frac{1}{2}I$ donc $T^n = (B + \frac{1}{2}I)^n$.
Or $B \times \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}IB$, donc $(\frac{1}{2}I)$ et B commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton <u>pour $n \geqslant 1$:</u>

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k}$$
$$= 1I(\tfrac{1}{2})^n I^n + nB\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} I^{n-1} + \mathbf{0} \qquad \text{car } \forall k \geqslant 2,\ B^k = \mathbf{0}$$
$$= \tfrac{1}{2^n}II + \tfrac{n}{2^{n-1}}BI$$
$$\boxed{T^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B}$$

Pour $n = 0$: $T^n = T^0 = I$ donc $\boxed{\text{la formule est vraie aussi pour } n = 0}$.
$\frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B = \frac{1}{1}I + \frac{0}{2^{-1}}B = I$

❀❀ **(c)** Donc pour tout entier naturel n, $T^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$.

❀❀ **4. (a)** Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$(P|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -4 & b-2a \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \text{donc } P \text{ est inversible}$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{4}L_2$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a - 2(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

Et $a - 2(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b) = \frac{1}{2}b$.

Donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

(b) $A^nP = PT^n$ donc $A^nPP^{-1} = PT^nP^{-1}$ (multiplication par P^{-1} à droite).

Donc, comme $PP^{-1} = I$, $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n+1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{2n}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2^n} & \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2^n} & -\frac{n}{2^{n+1}} \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1-n}{2^n} \end{pmatrix}}$$

❀❀ **5.** u_n est le coefficient du bas de U_n, donc le coefficient du bas de A^nU_0 soit $A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = \frac{n}{2^{n-1}} \times 2 + \frac{1-n}{2^n} \times 1 = \frac{4n}{2^n} + \frac{1-n}{2^n} = \frac{3n+1}{2^n}$

$\boxed{\text{Pour tout } n,\ u_n = \frac{3n+1}{2^n}.}$

Étudions la limite : $u_n = 3\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ par le théorème des croissances comparées avec $2 > 1$.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (car $2 > 1$).

Donc par somme, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

❀❀ Exercice 3.

1. L'application linéaire canoniquement associée à A est :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (-2x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3\ ,\ 6x_1 + 3x_2 - x_3\ ,\ 10x_1 + 5x_2 - \frac{5}{3}x_3) \end{array}}$$

2. • Détermination du noyau de A.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + \frac{1}{3}z & = & 0 \\ 6x + 3y - z & = & 0 \\ 10x + 5y - \frac{5}{3}z & = & 0 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} -2x - y + \frac{1}{3}z & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{array} \right.$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -2x - y + \frac{1}{3}z = 0 \right\}}$.

On peut aussi constater que $-2x - y + \frac{1}{3}z = 0 \iff x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z$.

Ainsi on peut écrire $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

- Détermination de l'image de A.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y \in \mathrm{Im}\,(A) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = Y$.

On étudie le système $AX = Y$:

$$\begin{cases} -2x - y + \frac{1}{3}z &= a \\ 6x + 3y - z &= b \\ 10x + 5y - \frac{5}{3}z &= c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + \frac{1}{3}z &= a & \\ 0 &= b + 3a & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 0 &= c + 5a & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si $b + 3a = 0$ et $c + 5a = 0$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}\,(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid b + 3a = 0 \text{ et } c + 5a = 0 \right\}}$.

3. On remarque que A est la matrice de ces trois vecteurs en colonne.
D'après la résolution du système pour le noyau (ou l'image) on constate que le rang de A est 1.
Or A a 3 lignes, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3}$.
Et A a 3 colonnes, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas libre}}$.

Exercice 4.

1. H projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ se traduit par $H \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MH}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$.

- $$\begin{aligned} H \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AH} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{v} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{v} \qquad (\text{car } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_H = -\lambda + 1 \\ y_H = 2\lambda + 6 \\ z_H = \lambda + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{MH}$ orthogonal à $\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{v} = 0$

Or $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda + 5 \\ \lambda + 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda + 4\lambda + 10 + \lambda + 2 = 6\lambda + 12$.

Donc $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{v} = 0 \iff \lambda = -2$.
Ainsi, $\boxed{H(3, 2, 1)}$.

2. H' est le projeté orthogonal de M sur le plan contenant A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ signifie que $\overrightarrow{MH'}$ est normal au plan, et H' est dans le plan.

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal au plan et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{MH'}$ est normal au plan se traduit par l'existence d'un réel λ tel que $\overrightarrow{MH'} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
autrement dit $H'(\lambda + 1, -3\lambda + 1, 7\lambda + 1)$.

- H' est dans le plan signifie $[\overrightarrow{AH'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.

Or $[\overrightarrow{AH'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} x_{H'} - 1 & 3 & -1 \\ y_{H'} - 6 & 1 & 2 \\ z_{H'} - 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_{H'} - 1 + 6(z_{H'} - 3) + 0 + z_{H'} - 3 + 0 - 3(y_{H'} - 6) =$
$x_{H'} - 3y_{H'} + 7z_{H'} - 4$
Donc $\lambda + 9\lambda + 49\lambda + 1 - 3 + 7 - 4 = 0$ soit $\lambda = \frac{-1}{59}$.
Donc $\boxed{H'\left(\frac{58}{59}, \frac{62}{59}, \frac{52}{59}\right)}$.

Exercice 5.

❀❀ **1.** $\begin{cases} 3x-y+z-3=0 \\ 3x-2z+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-y &= -z+3 \\ 3x &= 2z-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= z-3+3x \\ x &= \frac{2}{3}z-\frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 3z-5 \\ x &= \frac{2}{3}z-\frac{2}{3} \end{cases}$.

Donc $\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \mathcal{D} \text{ est } \begin{cases} x = \frac{2}{3}t-\frac{2}{3} \\ y = 3t-5 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$.

Et $\boxed{\text{un vecteur directeur est } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

2. $C(-\frac{2}{3},-5,0)$ est un point de $\mathcal{D}$.

Donc le plan $\mathcal{P}_1$ recherché contient le point A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AC}$. (A n'appartient pas à $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires)

Donc : $M\in\mathcal{P}_1 \iff [\overrightarrow{AM},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AC}]=0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ y+2 & 3 & -3 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x-\frac{7}{3}y+3z-\frac{23}{3}=0$

$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{P}_1 \text{ est } 6x-\frac{7}{3}y+3z-\frac{23}{3}=0}$.

❀❀ **3.** $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$. (ils ne sont pas colinéaires)

Donc $M\in\mathcal{P}_2 \iff [\overrightarrow{AM},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AB}]=0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & \frac{2}{3} & -3 \\ y+2 & 3 & 9 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x-\frac{11}{3}y+15z+\frac{41}{3}=0.$

$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{P}_2 \text{ est } -6x-\frac{11}{3}y+15z+\frac{41}{3}=0}$.

Exercice 6.

❀❀ **1. (a)** $\boxed{\Omega = [\![1;6]\!]}$.

D'après les informations de l'énoncé : $\mathbf{P}(\text{« le dé tombe sur la face } k \text{ »}) = k\mathbf{P}(\{1\})$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\mathbf{P}(\text{« le dé tombe sur la face } k \text{ »}) = 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k\mathbf{P}(\{1\}) = 1$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k\mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{1\})\times\frac{6\times 7}{2} = 21\mathbf{P}(\{1\})$.

Donc $\mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{21}$.

Donc $\boxed{\text{pour } k\in\Omega,\ \mathbf{P}(\{k\}) = \frac{k}{21}}$.

(b) $$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{« on tombe sur un nombre pair »}) &= \mathbf{P}(\text{« on tombe sur 2, 4 ou 6 »}) \\ &= \mathbf{P}(\{2\})+\mathbf{P}(\{4\})+\mathbf{P}(\{6\}) \\ &= \frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21} \\ &= \boxed{\frac{4}{7}}\end{aligned}$$

2. (a) $\boxed{\Omega = [\![1;6]\!]}$.

$\mathbf{P}(\{2\}) = \mathbf{P}(\{4\}) = \mathbf{P}(\{6\})$ et $\mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{3\}) = \mathbf{P}(\{5\})$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mathbf{P}(\{k\}) = 3\mathbf{P}(\{2\})+3\mathbf{P}(\{1\})$, et cette somme vaut 1.

Or $\mathbf{P}(\{2\}) = 2\mathbf{P}(\{1\})$.

Donc $9\mathbf{P}(\{1\}) = 1$ donc $\mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{9}$.

Donc $\mathbf{P}(\{2\}) = \frac{2}{9}$.

Finalement, $\boxed{\mathbf{P}(\{2\}) = \mathbf{P}(\{4\}) = \mathbf{P}(\{6\}) = \frac{2}{9} \text{ et } \mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{3\}) = \mathbf{P}(\{5\}) = \frac{1}{9}}$.

(b) $\mathbf{P}(\text{« le résultat est supérieur ou égal à 4 »}) = \mathbf{P}(\{4\})+\mathbf{P}(\{5\})+\mathbf{P}(\{6\}) = \frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$.