Devoir Maison n° 17

Pour le lundi 9 mars à 8h.

Rappel : la présentation et la rédaction entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies ! Encadrez les réponses, soignez les justifications ...

Exercice 1.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{x_n+4}.$$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, x_n est défini et est positif.

2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \frac{x_n-1}{x_n+3}.$$

Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

3. En déduire le terme général de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celui de (x_n).

4. Étudier la convergence de (x_n).

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

(b) Établir, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $AP = PT$.

(b) Établir que pour tout entier naturel n, $A^nP = PT^n$.

3. On pose $B = T - \frac{1}{2}I$.

(a) Donner B^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

(b) En utilisant la formule du binôme, montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ T^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{n}{2^{n-1}}B$.

Cette formule est-elle aussi vraie pour $n = 0$?

(c) En déduire, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de T^n.

4. **(a)** Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de A^n.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

Étudier la limite de (u_n).

Exercice 3.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 6 & 3 & -1 \\ 10 & 5 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A.

2. Déterminer le noyau et l'image de A.

3. La famille des vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Justifier précisément !

Exercice 4.

Soient deux points $M(1,1,1)$ et $A(1,6,3)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

2. Déterminer les coordonnées de H' projeté orthogonal de M sur le plan contenant A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par $\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z - 3 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{array}\right.$.

1. Déterminer un paramétrage et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2. Soit $A(1,-2,-1)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point A.

3. Soit $B(-2,7,0)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ parallèle à $\mathcal{D}$ contenant A et B.

Exercice 6.

On dispose d'un dé à six faces, truqué.

1. Dans cette partie, le dé est truqué de telle sorte que la probabilité d'une face soit proportionnelle au nombre qu'elle porte.
   - **(a)** Déterminer Ω et la probabilité de chaque issue.
   - **(b)** Calculer la probabilité que l'on obtienne un nombre pair.

2. Dans cette partie, la probabilité d'obtenir un nombre pair est deux fois plus élevée que celle d'un nombre impair. (Toutes les faces paires ont la même probabilité, toutes les faces impaires ont la même probabilité.)
   - **(a)** Déterminer Ω et la probabilité de chaque issue.
   - **(b)** Calculer la probabilité que l'on obtienne un nombre supérieur ou égal à 4.