Correction du Devoir Maison n° 10

Exercice 1.

1. On appelle $\mathcal{P}(n)$ la propriété $v_n \in [0,2]$.

Initialisation : pour $n=0$, $v_0 = 1 \in [0,2]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k \in [0,2]$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $v_{k+1} \in [0,2]$.

$$\begin{array}{lcccccl} \text{Par hypothèse,} & 0 & \leqslant & v_k & \leqslant & 2 & \\ & 2 & \leqslant & v_k+2 & \leqslant & 4 & \text{(on a ajouté 2)} \\ & \sqrt{2} & \leqslant & \sqrt{v_k+2} & \leqslant & \sqrt{4} & \text{car la fonction } \sqrt{\ } \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ & 0 & \leqslant & v_{k+1} & \leqslant & 2 & \text{car } \sqrt{2} \geqslant 0 \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,2]}$.

2. On appelle $\mathcal{P}(n)$ l'égalité : $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Pour $n=0$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 = 0^2 = 0$

Et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$.
Donc la formule est vraie pour $n=0$.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \ell^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k+1} \ell^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$.

On sait que $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k+1} \ell^2 = \sum_{\ell=0}^{k} \ell^2 + (k+1)^2$.

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on établit que :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k+1} \ell^2 &= \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\left(\tfrac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right) \\ &= (k+1)\tfrac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} \\ &= (k+1)\tfrac{2k^2+7k+6}{6} \end{aligned}$$

Or $((k+1)+1)(2(k+1)+1) = (k+2)(2k+3) = 2k^2+3k+4k+6 = 2k^2+7k+6$.

Donc $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k+1} \ell^2 = (k+1)\frac{((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

*** 3.** Pour tout n plus grand que 1, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x > -1, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \times \frac{2n!(x-n)}{(x+1)^{n+2}}$.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est-à-dire $f'(x) = (-1)^{1+1} \times \frac{2\times 1!(x-1)}{(x+1)^{1+2}}$.

Pour dériver f, on utilise la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2-(x^2+1)\times 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)\times 2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2+2x-2x^2-2}{(x+1)^3} = \frac{2(x-1)}{(x+2)^3}$.

Or $(-1)^{1+1} \times \frac{2\times 1!(x-1)}{(x+1)^{1+2}} = 1 \times \frac{2\times 1(x-1)}{(x+1)^3}$ donc l'égalité est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel plus grand que 1 quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \times \frac{2k!(x-k)}{(x+1)^{k+2}}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1+1} \times \frac{2(k+1)!(x-(k+1))}{(x+1)^{k+1+2}}$.

Dérivons $f^{(k)}$ donnée la formule de l'hypothèse de récurrence.
On utilise encore la dérivée du quotient.

$$\begin{aligned} f^{(n)\prime}(x) &= (-1)^{k+1}\frac{2k! \times 1(x+1)^{k+2} - 2k!(x-k)\times(k+2)(x+1)^{k+1}}{(x+1)^{2(k+2)}} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2k!(x+1) - 2k!(x-k)(k+2)}{(x+1)^{k+2+1}} \quad \text{(on a simplifié par } (x+1)^{k+1}\text{)} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2k!\left(x+1-(x-k)(k+2)\right)}{(x+1)^{k+2+1}} \end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned} 2k!\left(x+1-(x-k)(k+2)\right) &= 2k!\left(x+1-kx+k^2-2x+2k\right) \\ &= 2k!((-k-1)x+(k+1)^2) \\ &= 2k!(k+1)(-x+(k+1)) \\ &= -2(k+1)!(x-(k+1)) \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{-1\times 2(k+1)!(x-(k+1))}{(x+1)^{k+1+2}} = (-1)^{k+1+1} \times \frac{2(k+1)!(x-(k+1))}{(x+1)^{k+1+2}}$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que :
$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x > -1,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \times \frac{2n!(x-n)}{(x+1)^{n+2}}.}$

Exercice 2.

1. $1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4 = \frac{1-\eta^5}{1-\eta}$.
Or $\eta^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{\frac{2i\pi}{5}\times 5} = e^{2i\pi} = 1$.
Donc $\boxed{1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4 = 0}$.
Donc en particulier, $\mathrm{Re}\left(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4\right) = 0$.
Or
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4\right) &= \mathrm{Re}\,(1) + \mathrm{Re}\,(\eta) + \mathrm{Re}\left(\eta^2\right) + \mathrm{Re}\left(\eta^3\right) + \mathrm{Re}\left(\eta^4\right) \\ &= 1 + \cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{8\pi}{5}\right) \end{aligned}$$
Or $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
De même, $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
Ainsi, $\boxed{1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0}$.

2. $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right) = \boxed{2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1}$.
Donc $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2 = 0$ soit $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.
Autrement dit, $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ est solution de l'équation } 4x^2+2x-1=0}$.

3. Pour l'équation $4x^2+2x-1=0$:
$\Delta = 2^2 - 4\times 4\times(-1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$.
Les solutions sont $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
$x_1 < 0$ mais $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

***4.** $\cos(2\frac{\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\frac{\pi}{5}) + 1\right)$.
Donc
$$\begin{aligned} \cos^2(\tfrac{\pi}{5}) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ &= \tfrac{3+\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$
De plus, $\cos(\frac{\pi}{5}) > 0$ donc $\boxed{\cos(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}$.

Exercice 3.

1. $\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

2. Ici $a(x) = \sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$
donc on peut prendre $A(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$.
Les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions y de la forme
$y : x \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{3}{8}x\right)$.

Exercice 4.

1. Sur $]-\infty, 1[$, $(E) \iff y' - \frac{1}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}$

- équation homogène : $a(x) = -\frac{1}{1-x}$ donc on peut prendre $A(x) = \ln(|1-x|)$ et donc $A(x) = \ln(1-x)$ (car $x < 1$).
  Alors $e^{-A(x)} = e^{-\ln(1-x)} = \frac{\lambda}{1-x}$.
  Donc $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- solution particulière : recherche sous forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1-x}$ (variation de la constante).
  Alors $y'(x) = \frac{\lambda'(x)(1-x) - \lambda(x)\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{\lambda'(x)}{1-x} + \frac{\lambda(x)}{(1-x)^2}$.
  Donc $y'(x) - \frac{1}{1-x}y(x) = \frac{\lambda'(x)}{1-x} + \frac{\lambda(x)}{(1-x)^2} - \frac{\lambda(x)}{(1-x)(1-x)} = \frac{\lambda'(x)}{1-x}$
  Or on veut $y'(x) - \frac{1}{1-x}y(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ donc $\lambda'(x) = e^{-x}$.
  Donc on peut prendre $\lambda(x) = -e^{-x}$ et $y_p(x) = \frac{-e^{-x}}{1-x}$.
- solution générale : les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y : x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} - \frac{e^{-x}}{1-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

2. **(a)** $f(x) = \frac{e^{-x}}{-(1-x)} = -\frac{e^{-x}}{1-x}$ donc c'est une solution de (E) (obtenue pour $\lambda = 0$).
De plus, $f(0) = \frac{1}{e^0(0-1)} = -1$.
Le problème (E) avec la condition initiale $y(0) = -1$ est un problème de Cauchy donc il a une unique solution, donc c'est f.
$\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ satisfaisant à la condition initiale } y(0) = -1}$.

(b)
- en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-1) = 0$ par le théorème des croissances comparées.
  De plus, $e^x(x-1) < 0$ pour $x < -1$ donc par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.
- en 1 : $\lim\limits_{x\to1} e^x(x-1) = 0$ et $e^x(x-1) < 0$ pour $x < 1$ donc par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty}$.

(c) $f'(x) = -\dfrac{e^x(x-1) + e^x \times 1}{(e^x(x-1))^2} = -\dfrac{xe^x}{(e^x(x-1))^2}$.
Cette expression est du signe de $-x$ car $e^x > 0$ et un carré aussi.

Donc

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 5.

1. D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{F_g}$ avec $\overrightarrow{F_f}$ la force de frottement, et $\overrightarrow{F_g}$ la force de gravité. Alors $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_f} + \frac{1}{m}\overrightarrow{F_g}$ (avec $\overrightarrow{a_f}$ accélération dûe aux frottements).
En prenant les composantes sur z, avec les indications de l'énoncé, on obtient $z'' = -\gamma z' - \Omega^2 z$, soit $\boxed{z'' + \gamma z' + \Omega^2 z = 0}$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 + \gamma r + \Omega^2 = 0$.
Alors $\Delta = \gamma^2 - 4\Omega^2 = (\gamma - 2\Omega)(\gamma + 2\Omega)$.
Puisque γ et Ω sont positifs, et que $\gamma > 2\Omega$, on a $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles :
$r_1 = \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} < 0$ car le résultat de la racine est positif
$r_2 = \frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\Delta < \gamma^2$ car $4\Omega^2 > 0$, donc par croissance de la racine carrée, et comme $\gamma > 0$, on a $\sqrt{\Delta} < \gamma$ donc $r_2 < 0$.
Donc $\boxed{\text{les deux solutions sont négatives}}$.

Alors $\boxed{z(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}}$.
Puisque r_1 et r_2 sont négatifs, $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont monotones et tendent vers 0 en $+\infty$, donc les grains de poussière, tout en tournant autour de l'étoile centrale, ont tendance à se rapprocher du disque et se stabiliser dans le plan du disque.

3. Alors Δ est strictement négatif (γ et Ω sont toujours positifs), donc les racines sont complexes.
Et il existe δ tel que $(i\delta)^2 = \Delta$, alors les racines sont $r_1 = \frac{-\gamma - i\delta}{2}$ et $r_2 = \frac{-\gamma + i\delta}{2}$.
Les solutions réelles de l'équation différentielle seront donc les fonctions de la forme :
$\boxed{z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A\cos(\delta t) + B\sin(\delta t)\right) \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles}}$.
La partie entre parenthèses est une fonction qui oscille autour de 0, et cette oscillation est amortie par l'exponentielle négative $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.
Donc les grains de poussière vont osciller au-dessus et au-dessous du plan du disque mais avec une amplitude de plus en plus faible jusqu'à se stabiliser dans le plan du disque.