Devoir Maison n° 10

Pour le jeudi 9 janvier.

❄❄ Bon travail et bonnes vacances ! ❄❄

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

1. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$.
Montrer que pour tout n, $v_n \in [0; 2]$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

*** 3.** Soit f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.
Montrer que pour tout n plus grand que 1, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \times \frac{2n!(x-n)}{(x+1)^{n+2}}$.

Exercice 2.

Soit $\eta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Justifier que $1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0$.
En déduire que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

2. Exprimer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

*** 4.** Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Exercice 3.

1. Linéariser $\sin^4(x)$.

2. Résoudre $y' + \sin^4(x)y = 0$

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle (E) à résoudre sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ et en cherchant les fonctions à valeurs réelles :

$$(1-x)y' - y = e^{-x} \qquad (E)$$

1. Résoudre (E).

2. On considère la fonction f définie par :

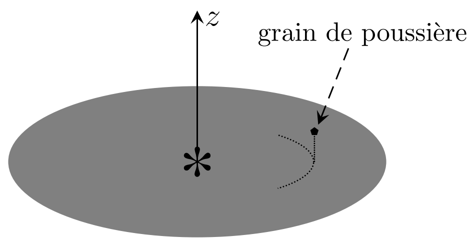
$$\forall x \in]-\infty; 1[, \ f(x) = \frac{1}{e^x(x-1)}$$

(a) Justifier que f est l'unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = -1$.

(b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et 1.

(c) Construire le tableau des variations de f.

Exercice 5.



Les planètes se forment dans un disque de gaz et de poussière centré autour de l'étoile, et un peu épais. On considère que la distance au centre des particules de gaz et des grains de poussière reste constante, la force centrifuge et la gravité s'équilibrant.
Verticalement, la pression compense la gravité pour le gaz, mais pour la poussière, ce n'est pas le cas.
On s'intéresse dans ce problème au mouvement d'un grain de poussière selon l'axe z.

Un grain de poussière est soumis à la gravité et au frottement du gaz.
On note m la masse du grain étudié.

1. On peut montrer que la composante selon z de la gravité s'écrit $-m\Omega^2 z$ où Ω est la vitesse angulaire du grain (positive).
Le frottement est inversement proportionnel à la vitesse et impose aux grains une accélération $-\gamma z'$ où γ est un coefficient (positif) qui dépend de la taille et de la masse du grain.
En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'altitude z du grain de poussière vérifie $z'' + \gamma z' + \Omega^2 z = 0$.

2. On considère dans cette question que le frottement est important, et donc $\gamma > 2\Omega$.
Démontrer qu'alors l'équation caractéristique a deux solutions réelles, et qu'elles sont toutes deux négatives.
Donner la solution générale de l'équation différentielle et interpréter le mouvement du grain de poussière dans ce cas.

3. On considère désormais le frottement faible par rapport à la vitesse angulaire : $\gamma < 2\Omega$.
Démontrer que les racines de l'équation caractéristique sont complexes (on ne cherchera pas à déterminer l'expression précise, on pourra se contenter d'utiliser δ tel que $(i\delta)^2 = \Delta$ sans déterminer δ).
Résoudre alors l'équation différentielle et interpréter sur le mouvement du grain de poussière dans ce cas.

Révisions facultatives sur les limites

Exercice 6.

1. Rappeler $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x - 1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x - 1}$.

4. La fonction $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ admet-elle des asymptotes ?

Exercice 7.

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\left(e^x + 7x^2\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x}\left(e^x + 7x^2\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \ln(8-2x)$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{x - 4}$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - x}{x - 4}$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$