Concours blanc

Le mardi 16 juin 8h15-12h15.

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 4 pages et 6 exercices.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$A(t) = \int_1^t x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3x} \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad C = \int_0^1 \frac{x}{2+x^4}\,\mathrm{d}x \text{ en posant } u = \frac{x^2}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 2.

1. Soient $P_1 = X + X^3$, $P_2 = X - 2X^2 + 2X^3$ et $P_3 = 1 + X$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.

2. Montrer que $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ et $\mathrm{Vect}(P_0)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ avec $P_0 = 1$.

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soient $F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in E \mid f \text{est une fonction constante}\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Soit h dans E, on pose $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Montrer que f appartient à F.

3. En utilisant **2.**, montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 4.

Partie A. Étude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans cette partie, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

5. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

7. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie B. Étude d'une somme.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k$.

1. Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(t)x^k$ valable pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x \in]-1,1[$.

En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)\,\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

2. En déduire que pour tout x de $]-1,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$.

On notera $S(x)$ cette intégrale.

3. On cherche dans cette question à calculer $S(x)$ par le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$.

(a) Justifier la formule $1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.

(b) Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

(c) En déduire que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $|x| < 1$.

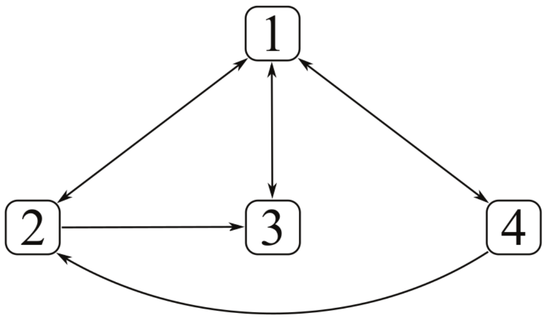
(d) Déterminer alors l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

Exercice 5. Marche aléatoire sur le net.

Internet peut être modélisé par un graphe dont les sommets sont les pages internet (ou sites) et les arêtes les liens entre les pages. L'idée de l'algorithme du « PageRank » est de surfer au hasard sur Internet et de compter combien de fois on passe sur chaque page.

Dans ce problème nous étudions deux exemples avec quatre pages puis trois pages. Le premier exemple avec quatre pages permet d'introduire les notations, et dans le second exemple l'étude est approfondie pour étudier les probabilités d'être sur chaque page à chaque instant.

Premier exemple.
Dans le schéma suivant, on considère un internet simplifié constitué de quatre pages internet. Par exemple, la page 1 possède un lien vers la page 2, un vers la page 3 et un vers la page 4, etc. La page 3 ne possède qu'un seul lien vers la page 1.



Exemple n° 1.

- i et j sont des indices de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et n est un entier naturel de $\mathbb{N}$.
- $p_n(j)$ est la probabilité que l'internaute soit sur la page j à l'instant $\tau = n$.
- On note $t_{i,j}$ la probabilité de se trouver à la page i à l'instant $\tau = n+1$ sachant qu'on était sur la page j à l'instant $\tau = n$. On fait l'hypothèse qu'il y a équiprobabilité entre les liens d'une page. Comme la page 1 pointe sur trois autres pages, la probabilité $t_{3,1}$ d'aller de la page 1 vers la page 3 est $\frac{1}{3}$.
- On fait également l'hypothèse qu'une page a une probabilité nulle de pointer sur elle-même, donc pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, $t_{i,i} = 0$.
- On note $A_n(j)$ l'événement « être sur la page j à l'instant $\tau = n$ » et on supposera que ces événements sont de probabilité non nulle.
- On note T_1 la matrice $(t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$. Cette matrice s'appelle matrice de transition dont le schéma présenté ci-dessus s'appelle graphe.

1. Compléter la matrice T_1 correspondante à l'exemple n° 1 en remplaçant les $t_{i,j}$ par leurs valeurs : (*on justifiera deux coefficients*)

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ \frac{1}{3} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ \frac{1}{3} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix}$$

2. Pour j de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$. Justifier soigneusement le résultat.

Deuxième exemple.
On considère dans cette partie la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On utilisera les mêmes notations que dans l'exemple précédent pour $p_n(j)$, $t_{i,j}$ et $A_n(j)$.

3. En s'inspirant du premier exemple, dessiner le graphe dont la matrice de transition est la matrice T.

4. En précisant le théorème utilisé, montrer que

$$p_{n+1}(1) = t_{1,1}p_n(1) + t_{1,2}p_n(2) + t_{1,3}p_n(3).$$

Puis donner une expression de $p_{n+1}(1)$ en fonction des $p_n(j)$.

5. Donner sans justification l'expression de $p_{n+1}(2)$ et $p_{n+1}(3)$ en fonction des $p_n(j)$.

6. On note U_n le vecteur colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = TU_n$.

7. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T^n U_0$.

8. On note $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Calculer PQ et en déduire que P est inversible et préciser son inverse.

(b) Justifier que $PA = TP$.

(c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = PA^nP^{-1}$.

(d) On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N = A - D$.
Calculer N^2 et en déduire une expression de A^n en fonction de n.

(e) On considère qu'à l'instant initial ($n = 0$), l'internaute est sur la page 1.
Déterminer les expressions de $p_n(1)$, $p_n(2)$ et $p_n(3)$ en fonction de n.

(f) Montrer que les trois suites $(p_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n(3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qui seront déterminées.
Quelle interprétation peut-on donner à ces limites ?

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0 \qquad (E)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

1. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}.$$

2. Montrer que toute fonction constante sur $]0, 1[$ est solution de (E).

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $\dfrac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x - 1}$.

4. On pose $z = y'$. Montrer que (E) est équivalent à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1}\right) z = 0. \qquad (E^\star)$$

5. Résoudre $(E^\star)$ sur $]0, 1[$.

6. En déduire les solutions de (E) sur $]0, 1[$.