Logique 1

Exercice 1.

Associer chaque terme à sa définition, et trouver l'illustration qui convient.

proposition •

propriété •

théorème •

hypothèse •

axiome •

• Énoncé supposé vrai a priori, et que l'on ne cherche pas à démontrer. •

• Proposition démontrée par un raisonnement logique construit à partir d'axiomes. •

• Qualité propre à une chose. On est souvent amené à montrer que certains objets mathématiques vérifient certaines de ces qualités. •

• Ce que l'on tient pour acquis dans le cadre d'un raisonnement afin d'obtenir le résultat désiré. •

• Énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux. •

• La fonction exponentielle est à valeurs positives.

• Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

• Tout entier naturel n a un unique successeur.

• Soit $x \in [0; 1]$.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

inconnue •

variable •

formule •

égalité •

équation •

expression •

équivalence •

fonction •

• Lettre à laquelle on peut attribuer différentes valeurs. •

• Grandeur, valeur que l'on doit déterminer.

• Phrase mathématique dont le verbe est le signe = . Le premier membre et le deuxième membre sont deux écritures différentes d'un même nombre. •

• Combinaison d'opérations permettant de définir un résultat à partir de données initiales •

• Égalité contenant une ou plusieurs lettres, appelées inconnues, dont on cherche à déterminer la ou les valeurs possibles, nommée(s) solution(s). •

• Relation entre deux propositions qui ont la même valeur de vérité. •

• Nom donné à certaines égalités remarquables. •

• Écriture formée de nombres, variables, signes, opérateurs, ... à l'exclusion du signe =. •

• « x » dans $f(x) = -\sqrt{x^2+3}$

• « x » dans $3x + 4 = 11$

• $3x + 4 = 7$

• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

• $7x^2 - 11x + 3$

• $|x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$

• $x \mapsto 11x + 49$

• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2.

Proposition ? Expression ? (In)équation ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$

. . . .

2. $x^2 - 3x + 1$

. . . .

3. $f(4) = 2$

. . . .

4. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x$

. . . .

5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$

. . . .

6. $f(x) = 3x$

. . . .

7. $f(x)$

. . . .

8. $(x^3 - 4x + 11) \times 2x - 4$

. . . .

9. $x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$

. . . .

10. f est à valeurs positives

. . . .

Exercice 3.

Écrire avec des mots et reformuler plus simplement (en français) :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y).$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$

4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y.$

Exercice 4.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI1, et n est l'application de E dans $[\![0;20]\!]$ qui à un élève associe sa note au prochain DS de maths.

1. Écrire de manière formelle les phrases suivantes :

- **(a)** Au moins un élève a la moyenne.
- **(b)** Au moins un élève n'a pas la moyenne.
- **(c)** Tous les élèves ont la moyenne.
- **(d)** Aucun élève n'a la moyenne.
- **(e)** Un seul élève a eu 17.

2. Donner la négation de chacune des phrases précédentes.

Exercice 5.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n.$

2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant n.$

3. $\pi < 0$ ou $-3 < 2.$

4. $\pi < 0$ et $-3 < 2.$

5. $\pi < 0 \Longrightarrow -3 > 2.$

6. $\pi < 0$ donc $-3 > 2.$

Exercice 6.

Dans chacun des cas suivants, tracer le graphique d'une (ou plusieurs) fonction(s) définie(s) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la propriété.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x).$

2. $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$

3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$

5. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a).$

Logique 1

Exercice 1.

Associer chaque terme à sa définition, et trouver l'illustration qui convient.

proposition •	• Énoncé supposé vrai a priori, et que l'on ne cherche pas à démontrer. •	• La fonction exponentielle est à valeurs positives.
propriété •	• Proposition démontrée par un raisonnement logique construit à partir d'axiomes. •	• Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
théorème •	• Qualité propre à une chose. On est souvent amené à montrer que certains objets mathématiques vérifient certaines de ces qualités. •	• Tout entier naturel n a un unique successeur.
hypothèse •	• Ce que l'on tient pour acquis dans le cadre d'un raisonnement afin d'obtenir le résultat désiré. •	• Soit $x \in [0; 1]$.
axiome •	• Énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux. •	• $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

inconnue •	• Lettre à laquelle on peut attribuer différentes valeurs. •	• « x » dans $f(x) = -\sqrt{x^2+3}$
variable •	• Grandeur, valeur que l'on doit déterminer.	• « x » dans $3x + 4 = 11$
formule •	• Phrase mathématique dont le verbe est le signe = . Le premier membre et le deuxième membre sont deux écritures différentes d'un même nombre. •	• $3x + 4 = 7$
égalité •	• Combinaison d'opérations permettant de définir un résultat à partir de données initiales •	• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
équation •	• Égalité contenant une ou plusieurs lettres, appelées inconnues, dont on cherche à déterminer la ou les valeurs possibles, nommée(s) solution(s). •	• $7x^2 - 11x + 3$
expression •	• Relation entre deux propositions qui ont la même valeur de vérité. •	• $\lvert x\rvert \leqslant 2 \Longleftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$
équivalence •	• Nom donné à certaines égalités remarquables. •	• $x \mapsto 11x + 49$
fonction •	• Écriture formée de nombres, variables, signes, opérateurs, ... à l'exclusion du signe =. •	• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2.

Proposition ? Expression ? (In)équation ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$

. . . .

2. $x^2 - 3x + 1$

. . . .

3. $f(4) = 2$

. . . .

4. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x$

. . . .

5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$

. . . .

6. $f(x) = 3x$

. . . .

7. $f(x)$

. . . .

8. $(x^3 - 4x + 11) \times 2x - 4$

. . . .

9. $x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$

. . . .

10. f est à valeurs positives

. . . .

Exercice 3.

Écrire avec des mots et reformuler plus simplement (en français) :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y).$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$

4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y.$

Exercice 4.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI1, et n est l'application de E dans $[\![0; 20]\!]$ qui à un élève associe sa note au prochain DS de maths.

1. Écrire de manière formelle les phrases suivantes :

- **(a)** Au moins un élève a la moyenne.
- **(b)** Au moins un élève n'a pas la moyenne.
- **(c)** Tous les élèves ont la moyenne.
- **(d)** Aucun élève n'a la moyenne.
- **(e)** Un seul élève a eu 17.

2. Donner la négation de chacune des phrases précédentes.

Exercice 5.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n.$

2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant n.$

3. $\pi < 0$ ou $-3 < 2$.

4. $\pi < 0$ et $-3 < 2$.

5. $\pi < 0 \Longrightarrow -3 > 2.$

6. $\pi < 0$ donc $-3 > 2$.

Exercice 6.

Dans chacun des cas suivants, tracer le graphique d'une (ou plusieurs) fonction(s) définie(s) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la propriété.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x).$

2. $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$

3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$

5. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a).$