Équations, inéquations

Attention, les méthodes présentées ci-dessous sont à adapter à la situation, elles ne permettent pas forcément de résoudre toutes les équations ou inéquations !

Équations ou inéquations polynomiales : se ramener à 0 d'un côté, ce qui revient à déterminer des racines et étudier les signes (une fois l'expression factorisée, on peut faire un tableau).
Pour les racines :
⋆ degré 2 : formules de Δ ...
⋆ degré 3 ou plus : racine évidente puis division
(si α est une racine de P, alors on factorise par $(x-\alpha)$).
⋆ degrés supérieurs : s'il n'y a que des exposants pairs, on peut poser $X = x^2$ ... exercice 1.(a)

Équations se ramenant à un polynôme : en posant par exemple $X = e^x$ ou $X = \cos(x)$ ... on peut se ramener à un polynôme pour trouver X, puis à une (ou deux) équation(s) de type $e^x = X_1$ ou X_2, $\cos(x) = X_1$ ou X_2.

Par exemple pour $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$, on pose $X = \cos(x)$:
on résout $2X^2 + X - 1 = 0$ les solutions sont $\frac{1}{2}$ et 1, on résout alors $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) = 1$.
exercice 1.(b)(c)(d)

Avec un carré : avec $c > 0$, $x^2 = c \iff x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$ et $x^2 < c \iff -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$

Avec une valeur absolue :
⋆ on peut utiliser une des règles ci-dessous pour enlever directement la valeur absolue :
$|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
avec $c \geqslant 0$, $|x| = c \iff x = c$ ou $x = -c$ exercice 2.
$|x| \leqslant c \iff -c \leqslant x \leqslant c$

⋆ si tous les termes sont positifs on peut mettre au carré :
$|2x-4| \leqslant |x-1| \iff |2x-4|^2 \leqslant |x-1|^2 \iff (2x-4)^2 \leqslant (x-1)^2$ exercice 2.

⋆ on peut traiter les différents cas dans un tableau : exercice 3.
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -\big(f(x)\big) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Pour étudier un signe : exercice 9.
⋆ résoudre l'« inéquation $\geqslant 0$ » (en dehors de la solution, l'expression sera négative)
⋆ factoriser pour simplifier le problème et faire un tableau de signes
⋆ étudier la fonction, ses variations et extrema.

Pour comparer deux fonctions : exercice 4.
si f et g sont dérivables sur I, pour montrer que $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$, on peut étudier le signe de la fonction $h = f - g$ (en la dérivant et étudiant ses variations).

De manière générale : exercices 5, 6, 7, 8.

- Mettre tous les termes du même côté pour se ramener à une « équation = 0 » ou une étude de signe, et factoriser pour utiliser le théorème du produit nul, ou construire un tableau de signe.

- Isoler le(s) x :

  Pour cela, on peut effectuer les opérations habituelles ($+$, $-$, $\times$, $\div$) ou appliquer une fonction (ln, exp, inverse, arccos, arcsin, arctan avec toutes précautions d'usage ...).

  ⋆ pour « défaire » un $\times$, on divise $\div$; pour « défaire » un $-$, on utilise $+$ ...

  ⋆ pour « défaire » ln, on applique exp ; pour « défaire » exp, on applique ln.

  ⋆ pour « libérer » un x dans une puissance, il faut plusieurs étapes, mais on commence toujours par appliquer ln, puis la formule $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

  ⋆ pour « libérer » un x d'une fonction trigonométrique (cos, sin, tan) : les fonctions réciproques ne donnent qu'une des multiples solutions !
  En général, il y a deux solutions sur le cercle, le tout à 2π près.
  $$\cos(x) = a \Longleftrightarrow x = \arccos(a)(2\pi) \text{ ou } x = -\arccos(a)(2\pi)$$
  $$\sin(x) = a \Longleftrightarrow x = \arcsin(a)(2\pi) \text{ ou } x = \pi - \arcsin(a)(2\pi)$$
  $$\tan(x) = a \Longleftrightarrow x = \arctan(a)(2\pi) \text{ ou } x = \pi + \arctan(a)(2\pi)$$

Précautions à prendre :

⋆ déterminer l'ensemble de définition, et vérifier que les solutions trouvées sont dans cet ensemble !

⋆ toujours préciser l'opération effectuée ou la fonction appliquée, et éviter au maximum les opérations effectuées avec des x ...

⋆ dans les inéquations, préciser le sens de variation de la fonction appliquée pour justifier la conservation ou l'inversion du sens de l'inégalité

⋆ lorsque l'on applique une fonction, ne pas oublier les parenthèses : $\begin{array}{c} \ldots = \ldots\ldots \\ \ln\big(\ldots\big) = \ln\big(\ldots\ldots\big) \end{array}$

⋆ le logarithme et l'exponentielle sont réciproques l'une de l'autre, donc appliquer l'une *juste à la suite* de l'autre fait revenir au départ : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(x)} = x$.
Mais attention : toute autre formule inventée à partir de celles-là sera probablement fausse : $\ln(2e^x) \neq 2x$ ...

⋆ les équations $x^2 = A$, $|x| = A$, $\cos(x) = A$, $\sin(x) = A$, $\tan(x) = A$ ... ont (en général) plusieurs solutions !!

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :
(a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ **(b)** $\tan(x) + \frac{3}{\tan(x)} = 4$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\backslash\{0\}$ **(c)** $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$ sur $\mathbb{R}$
(d) $2\sin^4(x) - \sin^3(x) - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$ sur $[-\pi; \pi[$

Exercice 2.

Résoudre : **(a)** $|2x-5| = 3$; **(b)** $|x+1| \leqslant 3$; **(c)** $|x+1| > 4$; **(d)** $|2x-4| \leqslant |x-1|$.

Exercice 3.

Résoudre $|x| + |x+2| = 3$ et $|x-1| + |2x-1| = |x+1|$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

2. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 5.

On place 200 euros sur un compte à intérêts composés de 2% par an.

1. Quel est le montant disponible au bout de x années ?

2. Au bout de combien d'années est-ce qu'il y aura sur le compte au moins 230 euros ?

Exercice 6.

On estime qu'entre fin juillet et décembre 2008, le prix du baril de pétrole a baissé d'en moyenne 1% par jour.
Sachant qu'il était d'environ 120 euros le 31 juillet, à partir de quel jour valait-il moins de 100 euros ?

Exercice 7.

Sébastien dispose d'un compte à intérêts composés, mais il a oublié le taux d'intérêt annuel.
Il se rappelle avoir mis 1000 euros sur ce compte il y a 7 ans, et il a aujourd'hui environ 1230 euros.

1. Justifier que le taux t vérifie $1000 \times (1+t)^7 = 1230$.

2. Déterminer une expression de t.

Exercice 8.

Résoudre : **(a)** $\ln(-2x+7) - \ln(4x-9) = -\ln(3)$; **(b)** $\ln(-x-5) = \ln(x-43)$
(c) $6\sin(2x) + 2 = -1$; **(d)** $x = \sqrt{8x-2}$; **(e)** $x\ln(2x+1) = 3x$.

Exercice 9.

Étudier le signe de :

1. $1+\ln(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,; +\infty[$;

2. $1 - e^{\frac{x}{5}}$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$;

3. $\sin(x) - x$ sur $\mathbb{R}$;

4. $(3x-12)\ln(2x-3)$ lorsque x varie dans $]\frac{3}{2}, +\infty[$;

5. $\ln(x^2+x+1)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$;

6. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+1}$ pour x dans $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}; 0\}$.