Polynômes

Exercice 1.

On note $F = \{P \in \mathbb{K}[X], P(0) = 0\}$.
Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de A par B.

1. $A = 2X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ et $B = 2X^2 - X - 2$.

2. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = 3 - 5X + X^2$.

3. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Quel est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X - 1$?

2. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$.

- **(a)** On suppose que le reste dans la division euclidienne de P par $X-1$ est 6 et que le reste dans la division de P par $X-2$ est 8. Quel est le reste dans la division de P par $(X-1)(X-2)$?
- * **(b)** Généralisation : si $a \neq b$, donner le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a, b et $P(a)$ et $P(b)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P = X^{n+1} - 2X^n + X + 1$.

- **(a)** Déterminer le reste R dans la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$.
- * **(b)** En déduire le quotient Q de cette division.

Exercice 4.

1. Rappeler l'ensemble des solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ puis de l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$.

2. Factoriser les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles :

- **(a)** $P = X^4 + X^2 - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$;
- **(b)** $Q = X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$;
- **(c)** $R = X^5 + 5X^4 - 5X^3 - 25X^2 + 40X - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$;
- ⋆ **(d)** $Q = X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$.

1. Montrer que $1+i$ est racine de P (*on peut utiliser la forme trigonométrique de* $1+i$), et en déduire une autre racine complexe de P.

2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.

Soit $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$.

1. Vérifier que 2 est racine et donner son ordre de multiplicité.

2. En déduire une factorisation de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, et dans $\mathbb{C}[X]$.

* Exercice 7.

Soit $P = X^3 + X + 1$. On appelle α_1, α_2 et α_3 ses racines complexes.
Calculer $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

Exercice 8.

Déterminer deux nombres dont la somme est égale à $\frac{19}{2}$ et le produit à 12.

* Exercice 9.

Soit le système $(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{array} \right.$.

1. Déterminer les valeurs de la somme $s = x + y$ et du produit $p = xy$ lorsque (x, y) est solution de $(\mathcal{S})$.

2. Résoudre $(\mathcal{S})$.

Exercice 10.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, montrer que les racines complexes du polynôme $1 - X^n$ sont simples.

* Exercice 11.

Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$: **(a)** $(P')^2 = 4P$ **(b)** $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 12.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n > 0$, et soit a dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $P(a) > 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

* Exercice 13.

L'objectif est de démontrer la formule de Leibniz. Soient P et Q des polynômes.

1. Démontrer qu'elle est vraie pour $n = 1$.

2. Soient n un entier et k un entier entre 0 et n : calculer la dérivée de $P^{(k)}Q^{(n-k)}$.

3. Démontrer la formule de Leibniz par récurrence.