Polynômes

Dans ce chapitre, nous étudierons les polynômes formels : ils généralisent la notion de fonction polynômiale que nous avons déjà étudiée à des polynômes d'autres objets mathématiques (matrices, nombres complexes ...). Nous ne les étudierons pas en tant que fonction, avec des graphiques, mais en tant qu'objet, outil de calcul. Mais bien sûr, tout ce que nous avons vu sur les fonctions polynômiales reste valable, et s'étend dans une certaine mesure à ces polynômes formels.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espace vectoriel des polynômes

1) polynôme à une variable

Définition.

Un ***polynôme à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $P = a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ noté aussi $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ où n est un entier naturel et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
Les nombres a_0, a_1, ... sont les ***coefficients de*** P.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Exemples : $7 + 3X$; 3 ; $-4 + 7X - \frac{3}{4}X^{12}$ ... sont des polynômes à coefficients réels.

Utilisation : un polynôme est une expression, dans laquelle on peut remplacer X par divers objets mathématiques : une matrice carrée, un nombre réel, un nombre complexe ... tant que les opérations de multiplication par un scalaire, de produit et de somme de ces objets sont bien définies.
Par exemple, avec $P = -2 + 5X + 3X^2$:

- si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $P(A) = -2A^0 + 5A + 3A^2 = -2I_3 + 5A + 3A^2$ (le « -2 » de P correspond en fait à $-2X^0$).
- $P(-5) = -2 + 5(-5) + 3(-5)^2 = 48$
- $P(2i) = -2 + 5(2i) + 3(2i)^2 = -2 + 10i + 3 \times (-4) = -14 + 10i$

Lorsque le X est remplacé par une variable x réelle, le polynôme devient une ***fonction polynomiale*** définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$.

Définition : degré.

Le ***degré*** d'un polynôme non nul est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
On note $d^\circ P$ (ou $\deg(P)$) le degré du polynôme P.

Si le degré de P est n, alors :
⋆ le terme a_nX^n est le ***terme dominant***, a_n est le ***coefficient dominant*** ;
⋆ si $a_n = 1$, alors P est dit ***unitaire*** (ou ***normalisé***).

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples : -2 est un polynôme de degré 0.

$-1 + 3X$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$ (et à $\mathbb{R}_5[X]$ et à $\mathbb{C}_4[X]$ ...). Son coefficient dominant est 3.

$11X - 7iX^3$ est dans $\mathbb{C}_3[X]$ (et aussi dans $\mathbb{C}_8[X]$ ...). Son coefficient dominant est $-7i$.

Remarque : les polynômes de degré 0 sont appelés ***polynômes constants***.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les mêmes coefficients.

2) opérations sur les polynômes

Soient deux polynômes non nuls : P de degré n et Q de degré m, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

On supposera $n \leqslant m$.
On définit les polynômes suivants :

- **la somme :** $P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots + (a_n + b_n)X^n + \ldots + b_m X^m$
- **le produit par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{K}$ **:** $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$
- **le produit de** P **par** Q **:** $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$
- **la composée de** P **par** Q **:** $P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (Q(X))^k$

> $\mathbb{K}[X]$ muni de la somme et la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
> Le neutre est le polynôme nul.

Explications du produit sur un exemple : $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

$$\begin{aligned} PQ &= (a_0 + a_1 X + a_2 X^2)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1X + a_0b_2X^2 + a_1b_0X + a_1b_1X^2 + a_1b_2X^3 + a_2b_0X^2 + a_2b_1X^3 + a_2b_2X^4 \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)X^3 + a_2b_2X^4 \end{aligned}$$

Le degré est 4 c'est bien $2 + 2$.

Le coefficient de X^2 est $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, cela correspond bien à $\sum_{p=0}^{2} a_p b_{2-p}$.

Exemples : Soient $P = 1 - 5X + 3X^2$ et $Q = 2X + X^3$.

$P + Q = 1 - 3X + 3X^2 + X^3$.

$7P = 7 - 35X + 21X^2$

$$\begin{aligned} PQ &= (1 - 5X + 3X^2)(2X + X^3) \\ &= 2X + X^3 - 10X^2 - 5X^4 + 6X^3 + 3X^5 \\ &= 2X - 10X^2 + 7X^3 - 5X^4 + 3X^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \circ Q &= 1 - 5(2X + X^3) + 3(2X + X^3)^2 \\ &= 1 - 10X - 5X^3 + 3(4X^2 + 4X^4 + X^6) \\ &= 1 - 10X + 12X^2 - 5X^3 + 12X^4 + 3X^6 \end{aligned}$$

Opérations et degré : $\boxed{\deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ (et } -\infty \text{ si } \lambda = 0)}$

$\boxed{\deg(P + Q) \leqslant \max\{\deg(P) + \deg(Q)\}}$ et $\boxed{\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)}$ et $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)}$.

Attention : pour la somme, le degré n'est pas toujours le maximum des deux : $P = 1 + X - X^2$ et $Q = 43 + X^2$ sont de degré 2 mais leur somme $P + Q$ est $44 + X$ qui est de degré 1.

Conséquence des degrés des résultats d'opérations : $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}[X]}$.

En effet :

⋆ Le neutre de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul, son degré $-\infty$ c'est plus petit que tout entier n donc le polynôme nul est dans $\mathbb{K}_n[X]$.

⋆ Montrons que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$, et λ dans $\mathbb{K}$.
$\deg(P + \lambda Q) \leqslant \max\{\deg(P) + \deg(Q)\}$.
Or $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$ car P et Q sont dans $\mathbb{K}_n[X]$.
Donc $\deg(P + \lambda Q) \leqslant n$ donc $P + \lambda Q \in \mathbb{K}_n[X]$. □

II. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1) diviseurs et multiples

Définition.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.
On dit que A ***est un multiple de*** B (ou B divise A) si il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On peut noter $B|A$.

Exemples :

- $X - 2$ divise $X^2 - 4$ car $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$.
- le polynôme nul est un multiple de tous les polynômes.
- un polynôme constant (non nul) divise tout polynôme.

Propriété : division euclidienne.

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul.
Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel $A = BQ + R$.
Q est le ***quotient*** et R le ***reste*** dans la ***division euclidienne*** de A par B.

Remarque : A est un multiple de B si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Méthode : pour trouver Q et R on pose la division euclidienne de A par B.
Par exemple, avec $A = X^5 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
X^5 + 0X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2}
-(X^5 - X^4 + X^3) \qquad\qquad\qquad & X^3 + X^2 + 2X - 2 \\ \cline{1-1}
X^4 + X^3 - 3X^2 \qquad\quad & \\
-(X^4 - X^3 + X^2) \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
2X^3 - 4X^2 + X \quad & \\
-(2X^3 - 2X^2 + 2X) \quad & \\ \cline{1-1}
-2X^2 - X - 1 & \\
-(-2X^2 + 2X - 2) & \\ \cline{1-1}
-3X + 1 &
\end{array}$$

D'après la division ci-contre :
$A = B(X^3 + X^2 + 2X - 2) + (-3X + 1)$.

2) racine et divisibilité

Définition d'une racine.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une ***racine*** de P si $P(\alpha) = 0$.
(autrement dit α annule la fonction polynomiale associée à P)

Propriété.

α est une racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Démonstration :

« $\Longleftarrow$ » : si $(X - \alpha)$ divise P, alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$
donc $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$ donc α est une racine de P.

« $\Longrightarrow$ » : on effectue la division euclidienne de P par $X - \alpha$.
Il existe donc un polynôme Q et un polynôme R de degré strictement inférieur à 1 tels que $P = (X - \alpha)Q + R$.
R étant de degré strictement inférieur à 1, il est constant (éventuellement nul). On le note λ.
On a donc $P = (X - \alpha)Q + \lambda$, et donc en particulier, $P(\alpha) = 0Q(\alpha) + \lambda = \lambda$.
Ainsi, si α est une racine de P, alors $P(\alpha) = 0$.
Donc $\lambda = 0$ donc $P = (X - \alpha)Q$, autrement dit $(X - \alpha)$ divise Q. $\square$

Définition : multiplicité d'une racine.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et α une racine de P.
On appelle ***multiplicité de la racine*** α l'unique entier r tel que $(X-\alpha)^r$ divise P et $(X-\alpha)^{r+1}$ ne divise pas P.

Propriété (caractérisation de la multiplicité d'une racine).

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$: α est une racine de P de multiplicité r si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^r Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Exemples :

- 0 est une racine triple de $X^5 + 2X^3$,
  en effet : $X^5 + 2X^3 = X^3(X^2+2)$ donc X^3 divise $X^5 + 2X^3$, et 0 n'est pas une racine de X^2+2.
- 2 est racine simple de $X^3 - 4X$:
  en effet, $X^3 - 4X = (X-2)(X^2+2X)$ et 2 n'est pas une racine de X^2+2X.

Propriété.

Soit P un polynôme non nul.
On suppose que α_1, α_2, $\dots \alpha_n$ sont des racines distinctes de P.
De plus, on notera r_k l'ordre de multiplicité de α_k.
Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{r_k}$ divise P.

Propriété (conséquence).

Le degré d'un polynôme non nul est supérieur ou égal au nombre total de ses racines comptées avec leurs multiplicités.

Application : pour montrer qu'un polynôme de degré n est nul, on peut montrer qu'il a au moins $n+1$ racines.

Par exemple, soit P un polynôme tel que $P(X+1) = P(X)$, montrons que P est constant.

On pose $Q = P - P(0)$. Alors $Q(0) = 0$, $Q(1) = P(1) - P(0) = P(1+0) - P(0) = 0$,
$Q(2) = P(2) - P(0) = P(1+1) - P(0) = P(1) - P(0) = 0 \dots$
Par récurrence, on pourrait montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

Ainsi, tous les entiers positifs sont des racines de Q, donc Q a une infinité de racines, donc il est nul, donc P est constant.

Définition.

Lorsqu'il y a égalité entre le degré et le nombre des racines comptées avec leurs multiplicités, on dit que le polynôme est ***scindé***, et alors le polynôme P s'écrit $P(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{r_k}$, où les a_k sont les racines distinctes et r_k leurs ordres de multiplicité, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par exemple, le polynôme $P = -2X^3 + 12X^2 - 18X$ est scindé :
$P = X(-2X^2 + 12X - 18) = -2X(X^2 - 6X + 9) = -2X(X-3)^2$.

0 est racine simple, 3 est racine double.
P est de degré 3 (qui fait bien 1+2).

3) décomposition en produit de facteurs irréductibles

Définition.

Un polynôme P est dit ***irréductible*** lorsque son degré est supérieur ou égal à 1 et qu'il n'a pour diviseurs que les polynômes constants ou ceux de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Vocabulaire : les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont dits ***associés*** à P.

Exemples :
- $1+X$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $1-X^2$ n'est pas irréductible car il est divisible par $(1-X)$.
- $1+X^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (les seuls diviseurs non constants et non associés sont de degré 1, cela signifierait que X^2+1 a une racine dans $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas le cas).

a. Dans $\mathbb{C}[X]$:

Théorème de d'Alembert Gauss.

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine.

Propriété (conséquences).
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$P=\lambda\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{r_k}$ où les α_k sont les racines distinctes de P et r_k leurs multiplicités respectives.

Exemple :
$$\begin{aligned} P &= 4X^4+8X^2 \\ &= 4X^2(X^2+2) \\ &= 4X^2(X-i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2}) \end{aligned}$$
Et cette forme est la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

0 est racine de multiplicité 2
$i\sqrt{2}$ est racine de multiplicité 1
$-i\sqrt{2}$ est racine de multiplicité 1
(la somme des multiplicités fait bien 4)

b. Dans $\mathbb{R}[X]$:

Propriété.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Propriété.

Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{C}$.
Si α est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi, avec la même multiplicité.

Remarque : $\mathbb{R}[X]\subset\mathbb{C}[X]$, donc lorsque l'on parle de racine complexe pour P, on voit P comme un élément de $\mathbb{C}[X]$.

Preuve de la propriété :
On note α une racine de P de multiplicité r.
Alors il existe Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)^rQ$ avec $Q(\alpha)\neq 0$ (propriété de caractérisation de la multiplicité d'une racine).
On note $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les polynômes où les coefficients sont remplacés par leurs conjugués.
P étant à coefficients réels, $\overline{P}=P$, donc $P=\overline{(X-\alpha)^rQ}$.
Par les propriétés de calcul avec le conjugué dans $\mathbb{C}$, on déduit $P=\overline{(X-\alpha)^r}\times\overline{Q}=\overline{(X-\alpha)}^r\,\overline{Q}=(X-\overline{\alpha})^r\overline{Q}$.
Or $\overline{Q}(\overline{\alpha})=\overline{Q(\alpha)}\neq 0$ (car $Q(\alpha)\neq 0$).
Donc $\overline{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité r (propriété de caractérisation de la multiplicité d'une racine).
$\square$

Conséquence : Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$. P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: il aura peut-être des racines réelles, et des racines complexes.
On note $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ les éventuelles racines réelles de P de multiplicités respectives $r_1,r_2,\dots,r_n$.
On sait de plus que si un complexe est racine, alors son conjugué est racine avec la même multiplicité, ainsi, on peut noter les racines complexes éventuelles ainsi : $\beta_1,\overline{\beta_1},\beta_2,\overline{\beta_2},\dots,\beta_m,\overline{\beta_m}$ et on note r'_k la multiplicité commune de β_k et $\overline{\beta_k}$.

Alors $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{r_k}\prod_{k=1}^{m}(X-\beta_k)^{r'_k}(X-\overline{\beta_k})^{r'_k}$.

Or $\quad (X-\beta_k)^{r'_k}(X-\overline{\beta_k})^{r'_k} = \Big((X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k})\Big)^{r'_k}$

$= \Big(X^2-(\beta_k+\overline{\beta_k})X+\beta_k\overline{\beta_k}\Big)^{r'_k}$ et $\beta_k+\overline{\beta_k}$ et $\beta_k\overline{\beta_k}$ sont des nombres réels

Ainsi, $X^2-(\beta_k+\overline{\beta_k})X+\beta_k\overline{\beta_k}$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car ses racines sont complexes.

On en déduit :

Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$P(X) = \lambda\prod_{k=0}^{n}(X-\alpha_k)^{r_k}\prod_{k=0}^{m}(X^2+p_kX+q_k)^{r'_k}$ avec λ un réel, n et m dans $\mathbb{N}$
α_k, p_k et q_k dans $\mathbb{R}$ et $p_k^2-4q_k<0$

Exemples :

- Décomposons $P = X^3+3X^2+4X+2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
  - ⋆ $P(-1) = (-1)^3+3\times(-1)^2+4\times(-1)+2 = 0$
    Donc $(X+1)$ divise P.
    On trouve $P=(X+1)(X^2+2X+2)$.
    Pour X^2+2X+2, $\Delta = 4-8=-4<0$ donc il est irréductible.
    La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est $\underline{P=(X+1)(X^2+2X+2)}$.
  - ⋆ Pour $\mathbb{C}[X]$, on remarque que $\Delta = (2i)^2$.
    Donc les racines complexes de X^2+2X+2 sont $z_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$ et $z_2 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$.
    Donc la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :
    $$P = (X+1)\big(X-(-1-i)\big)\big(X-(-1+i)\big) \text{ ou } \underline{P=(X+1)(X+1+i)(X+1-i)}.$$

- Décomposons X^4+1 en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
  - ⋆ On commence par résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^4=-1$.
    $z^4=-1 \iff z^4 = e^{i\pi}$ donc les solutions sont $z_k = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{4}}$ avec $k\in[\![0,3]\!]$
    Autrement dit $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$, donc la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $\underline{P = (X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{i\frac{5\pi}{4}})(X-e^{i\frac{7\pi}{4}})}$.
  - ⋆ Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$:
    on remarque que $e^{i\frac{\pi}{4}}$, et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$ sont conjugués, de même que $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.
    On va regrouper les facteurs correspondants dans la décomposition de P :
    $$\begin{aligned} P &= (X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{i\frac{7\pi}{4}})(X-e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-e^{i\frac{5\pi}{4}}) \\ &= \Big(X^2-(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{7\pi}{4}})X+e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\Big)\Big(X^2-(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}})X+e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{i\frac{5\pi}{4}}\Big)\end{aligned}$$
    Or $\quad e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}$ car ils sont conjugués
    $= 2\cos(\frac{\pi}{4})$ (presque formule d'Euler)
    $= \sqrt{2}$
    Et $e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{8\pi}{4}} = 1$.
    De même, $e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 1$.
    On obtient
    $$\underline{P = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$$
    Ceci est la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

4) relations coefficients racines

Propriété.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré n.

On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines, éventuellement égales.

Alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exemple au degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ et on note α_1 et α_2 ses racines, ainsi $P = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$.

$$\begin{aligned} a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) &= a(X - \alpha_2 X - \alpha_1 X + \alpha_1\alpha_2 \\ &= aX^2 - a(\alpha_1+\alpha_2)X + a\alpha_1\alpha_2 \\ \text{Or, } \ P &= aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

On identifie, on trouve $b = -a(\alpha_1+\alpha_2)$ donc $\alpha_1+\alpha_2 = -\frac{b}{a}$.

De même : $c = a\alpha_1\alpha_2$ donc $\alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}$.

Dans un polynôme de degré 2 scindé, si on note s la somme des racines, et p leur produit, alors le polynôme peut s'écrire $aX^2 - asX + ap$.

III. Dérivation des polynômes

1) définition

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle ***polynôme dérivé*** de P et on note P' le polynôme $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ autrement dit $P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \ldots + n a_n X^{n-1}$.

Exemple : si $P = -7 + X - 6X^3 + 3X^4$, alors $P' = 1 - 18X^2 + 12X^3$.

Propriété.

Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $(P+Q)' = P' + Q'$ et $(\lambda P)' = \lambda P'$ et $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Bilan : les formules de dérivées sur les fonctions sont toujours valables pour la dérivation des polynômes.

2) dérivées d'ordre supérieur

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on définit par récurrence les dérivées successives de P :

$P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$. (en particulier $P^{(1)} = P'$; $P^{(2)} = P''$)

Remarques importantes :

- si $\deg(P) = n$, alors : $\deg(P^{(k)}) = n - k$ pour $k \leqslant n$
  $P^{(k)} = 0$ pour $k > n$
- $(P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$ et $(\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

Théorème : Formule de Leibniz.

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Démonstration : se fait par récurrence, voir l'**exercice 13**.

3) Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré n :

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n$ donc $P(0) = a_0$

$P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + na_nX^{n-1}$ donc $P'(0) = a_1$

$P'' = 2a_2 + 3 \times 2a_3X + \ldots + n(n-1)a_nX^{n-2}$ donc $P''(0) = 2a_2$ donc $a_2 = \frac{P''(0)}{2}$

Et ainsi de suite, $P^{(3)}(0) = 3 \times 2a_3$ donc $a_3 = \frac{P^{(3)}(0)}{3\times 2} = \frac{P^{(3)}(0)}{3!}$.

Théorème : Formule de Taylor.

Soit P un polynôme dans $\mathbb{K}_n[X]$:

- $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$
- pour tout a de $\mathbb{K}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Pour obtenir la deuxième formule, on applique la première au polynôme Q défini par $Q = P(X+a)$.
$Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
Or $Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(X+a)$ donc $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$.

Alors, $P(X) = Q(X-a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

4) lien avec la multiplicité des racines

Propriété.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
α est racine de P de multiplicité r si et seulement si $\forall k < r, P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

En particulier, α racine double signifie que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.

Exemple : on note P le polynôme $P = X^4 + 5X^3 + 6X^2 - 4X - 8$, et on cherche l'ordre de multiplicité de la racine -2.
$P(-2) = 16 - 40 + 24 + 8 - 8 = 0$ (ordre au moins 1)
$P' = 4X^3 + 15X^2 + 12X - 4$ donc $P'(-2) = -32 + 60 - 24 - 4 = 0$ (ordre au moins 2)
$P'' = 12X^2 + 30X + 12$ donc $P''(-2) = 48 - 60 + 12 = 0$ (ordre au moins 3)
$P^{(3)} = 24X + 30$ donc $P^{(3)}(-2) = -48 + 30 \neq 0$
Donc -2 est racine de multiplicité 3 de P.