Intégration.

* Exercice 1.

Soit f une fonction continue sur I, et x_0 dans I.

Le but est de montrer que la fonction F définie sur I par $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable en a de I et que $F'(a) = f(a)$.

1. Montrer que $\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - f(a) = \frac{1}{h}\displaystyle\int_a^{a+h} f(t) - f(a)\ \mathrm{d}t$.

2. En utilisant la continuité de f en a, démontrer la proposition suivante et conclure :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall h, |h| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1. Montrer qu'il existe a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 3.

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$A = \displaystyle\int_1^2 1\ \mathrm{d}t$ (notée aussi $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}t$) $\qquad B = \displaystyle\int_0^1 e^{-3t}\ \mathrm{d}t \qquad C = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(x^2 + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right)\ \mathrm{d}x$

$D = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+i}$ *(mettre $\frac{1}{t+i}$ sous forme algébrique !)* $\qquad E = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x \qquad F = \displaystyle\int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)\ \mathrm{d}x$

Exercice 4.

Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 5.

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$A = \displaystyle\int_0^{\ln(3)} x\exp(2x)\ \mathrm{d}x \qquad B = \displaystyle\int_{-1}^0 (x+2)e^{3x}\ \mathrm{d}x \qquad C = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad D = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\ \mathrm{d}x$

$E = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln(x)\ \mathrm{d}x \qquad F = \displaystyle\int_0^1 (t^2+t)e^{2t}\ \mathrm{d}t \qquad G = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3t}\cos(2t)\ \mathrm{d}t \qquad H = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x.$

Exercice 6.

Justifier l'existence et calculer en effectuant les changements de variable donnés :

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t$ avec $u = \cos(t)$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\ \mathrm{d}t$ avec $x = \sin(t)$.

$K = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\ \mathrm{d}t$ pour $x > 0$ avec $u = \sqrt{t}$.

Exercice 7.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par : $u_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3\times\frac{k}{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$.

Déterminer leurs limites.

Exercice 8.

On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))\ \mathrm{d}t$.

1. Effectuer le changement de variable $x = \ln(t)$.

2. En faisant deux intégrations par parties successives, montrer que $I = (1 + e^\pi) - I$.

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 9.

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant t^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.

2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. Conclure sur la convergence de la suite I_n.

Exercice 10.

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n\ \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

2. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de I_n puis un équivalent.

Exercice 11.

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^1 (-1)^k x^k\ \mathrm{d}x$ et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 12.

On définit pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Prouver que (I_n) est monotone.

3. Majorer $|1 - I_n|$ et en déduire que (I_n) converge vers 1.

* **4.** Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$.

* **5.** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x = 0$ et en déduire que $I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 13.

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer f'.
Construire le tableau des variations de f (sans les limites) et en déduire le signe de $f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - \ln(x)$.
Étudier les variations de g et en déduire son signe.

3. En utilisant ce qui précède, déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

2. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}^+$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant (n-1)!$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4. En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.