Intégration.

Le fondement de la théorie de l'intégration est de calculer l'aire d'une surface sous une courbe. C'est Leibniz (1646-1716) qui initia la recherche dans ce domaine et introduit les notations :
$\displaystyle\int$ est un ≪ S ≫ étiré pour signifier **somme** et le $\mathrm{d}x$ étant une variation infinitésimale de x.

Toutefois, ces calculs d'aire posèrent de nombreux problèmes théoriques, qui furent en partie résolus par Riemann (1826-1866), puis par Lebesgue (1875-1941), qui, par une autre approche, permet d'étendre la notion d'intégrabilité à d'autres fonctions. C'est le début de la théorie de la mesure qui est à la base de la théorie des probabilités continues.

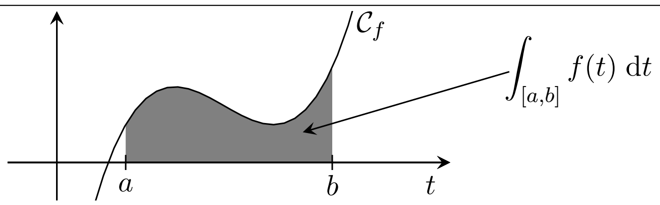
Les intégrales sont toujours source de recherches.

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1) Définition

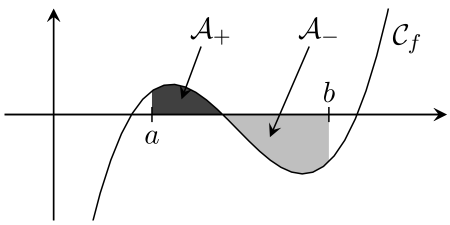
Définition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b dans I (avec $a < b$).
f est une fonction continue sur I, à valeurs positives sur $[a, b]$, alors l'***intégrale de*** f ***sur*** $[a, b]$ est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et représente l'aire de la surface située entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. (mesurée en unités d'aires)
On peut aussi noter cette intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.



Extensions de la définition : une intégrale est une aire ***algébrique*** (ou orientée).

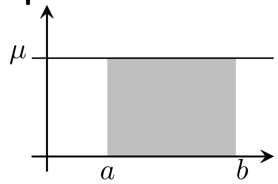
- cas où la fonction prend des valeurs négatives : en dessous de l'axe des abscisses, les aires comptent négativement.



$$\int_{[a,b]} f = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$

- cas où les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant : si $a > b$, alors on pose $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$.

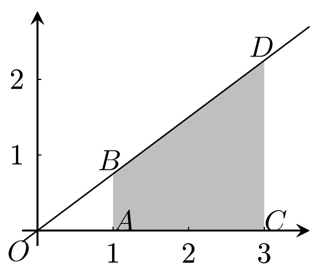
Exemples :

- 

f est constante : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mu$.

Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \ell \times L = \mu(b - a)$

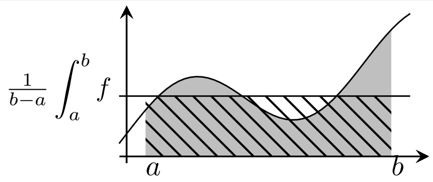
Et $\displaystyle\int_b^a f = -\mu(b - a) = \mu(a - b)$.

- 

Ici $f(x) = \frac{3}{4}x$ et donc
$$\begin{aligned}\int_{[1,3]} f &= \mathcal{A}_{OCD} - \mathcal{A}_{OAB}\\ &= \tfrac{1}{2}OC \times CD - \tfrac{1}{2}OA \times AB\\ &= \tfrac{1}{2} \times 3 \times f(3) - \tfrac{1}{2} \times 1 \times f(1)\\ &= \tfrac{1}{2} \times 3 \times \tfrac{3}{4} \times 3 - \tfrac{1}{2} \times 1 \times \tfrac{3}{4} \times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

Définition.

On appelle valeur moyenne sur $[a,b]$ de la fonction f le nombre $\frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.



L'aire du rectangle hachuré est égale à $\displaystyle\int_a^b f$.

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est la hauteur de ce rectangle.

2) Propriétés de l'intégrale

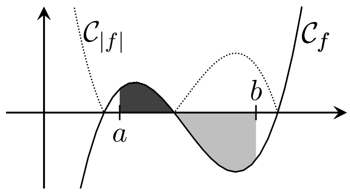
Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et $[a,b]$ est inclus dans I.

Positivité : Si f est à valeurs positives sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

Conséquence : croissance de l'intégrale : Si pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

Théorème de nullité : Si f est à valeurs positives sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ sur $[a,b]$.

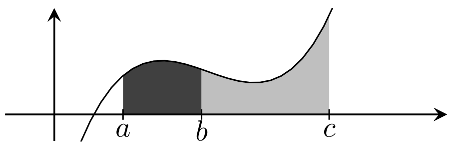
Intégrale et valeur absolue : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$



$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = |\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-|$$
$$\int_{[a,b]} |f| = \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-$$

Les deux propriétés qui suivent sont valables quel que soit l'ordre des bornes : a, b et c sont dans I.

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$



Linéarité : $\displaystyle\forall\lambda\in\mathbb{R} : \int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda\int_a^b g$ et donc $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k$.

3) Cas où la fonction est à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b dans I et f une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$.

Alors on définit l'intégrale de f entre a et b par $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)$.

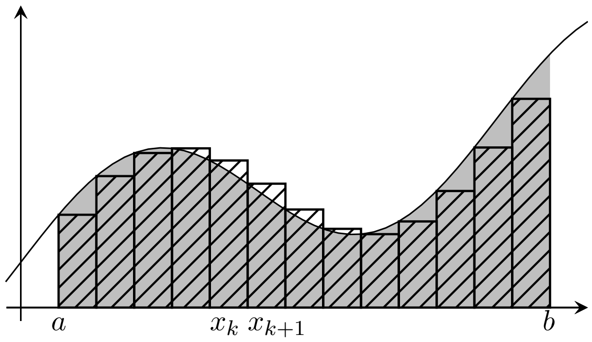
Exemple : $\displaystyle\int_{[1;3]} \frac{3}{4}x + 7i \,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{3}{4}x \,\mathrm{d}x + i\int_1^3 7 \,\mathrm{d}x = 3 + 14i$

4) Sommes de Riemann

Définition.

On appelle ***sommes de Riemann de f sur*** $[a,b]$ les nombres :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ avec } n\in\mathbb{N}^*.$$



$S_n(f)$ est la somme des aires des n rectangles, elle correspond donc à l'aire hachurée dans la figure ci-contre, en effet :

- la largeur d'un rectangle est $\frac{b-a}{n}$
- le côté gauche du k-ième rectangle est en $x_k = a + k \times \frac{b-a}{n}$
- la hauteur est $f(x_k)$

Le k-ième rectangle a donc pour aire $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$.

Théorème.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_{[a,b]} f$.

Démonstration dans le cas où f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

L'idée est d'étudier la différence entre $S_n(f)$ et $\int_{[a,b]} f$ pour un n fixé, et de la majorer par une quantité qui va tendre vers 0.

Première étape : découper cette différence en somme des différences sur chaque rectangle.

- pour k fixé : $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$ peut être vue comme l'aire sous la droite horizontale d'équation $y = f(x_k)$, entre les abscisses x_k et x_{k+1}, autrement dit $\frac{b-a}{n} \times f(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ \mathrm{d}t$
- et par la relation de Chasles, $\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$

Donc
$$\begin{aligned}
S_n(f) - \int_{[a,b]} f &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ \mathrm{d}t - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \right) && \text{propriété de } \Sigma \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) - f(t)\ \mathrm{d}t && \text{linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Deuxième étape : passer aux écarts, avec la valeur absolue.

$$\begin{aligned}
\left| S_n(f) - \int_{[a,b]} f \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) - f(t)\ \mathrm{d}t \right| && \text{inégalité triangulaire de la valeur absolue} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\ \mathrm{d}t && \text{propriété de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Troisième étape : sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$, majorer $|f(x_k) - f(t)|$.

Préliminaire : f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, donc f' est continue, donc par une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que f' est bornée sur $[a,b]$. Il existe donc un réel C tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leqslant C$.

⋆ f est continue sur $[a,b]$;
⋆ f est dérivable sur $]a,b[$ (car elle est supposée $\mathcal{C}^1$) ;
⋆ $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant C$

Pour un k fixé, $x_k \in [a,b]$ et pour tout t de $[x_k, x_{k+1}]$, t est aussi dans $[a,b]$, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre x_k et t : $|f(x_k) - f(t)| \leqslant C|x_k - t|$.
Or si $t \in [x_k, x_{k+1}]$, alors $|x_k - t| = t - x_k$.
Donc pour tout k, $|f(x_k) - f(t)| \leqslant C(t - x_k)$

Quatrième étape : reconstituer l'expression complète en intégrant puis en ajoutant.

Par croissance de l'intégrale, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant C \int_{x_k}^{x_{k+1}} t - x_k\ \mathrm{d}t$.

$$\text{Et} \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} t - x_k \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(x_k - x_{k+1})^2 \qquad \text{(aire du triangle ou par primitive)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b-a}{n}\right)^2$$
$$= \tfrac{(b-a)^2}{2n^2}$$

Finalement, $\left| S_n(f) - \displaystyle\int_{[a,b]} f \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C\frac{(b-a)^2}{2n^2}$.

Dernière étape : conclusion : faire tendre n vers $+\infty$!

$$\sum_{k=0}^{n-1} C\frac{(b-a)^2}{2n^2} = C\frac{(b-a)^2}{2n^2} \times n = C\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Donc $\left| S_n(f) - \displaystyle\int_{[a,b]} f \right| \leqslant C\dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} C\frac{(b-a)^2}{2n} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_{[a,b]} f$. □

Applications :

- Trouver des valeurs approchées d'intégrales. Cela s'appelle la ***méthode des rectangles à gauche*** : on calcule la somme des aires des rectangles, et plus le nombre n de rectangles est grand, plus le résultat est proche de l'intégrale.
  Par analogie, on peut aussi appliquer la méthode des rectangles à droite, ou la méthode des trapèzes.
- Calculer des limites de sommes en les mettant sous forme d'une somme de Riemann.
  Par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.
  On remarque : $\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
  En notant $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right)$, ce qui est la somme de Riemann de la fonction f sur $[0,1]$.
  La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$.

II. Calcul d'intégrales

Rappel : si f est une fonction continue sur un intervalle I, on appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I, telle que $F' = f$.

Propriétés.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I, et même une infinité.

- Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + C$ sont des primitives de f sur I, et toutes les primitives s'écrivent ainsi.
- Soient x_0 un nombre de I, et y_0 un nombre quelconque.
  Alors il existe une et une seule primitive de f qui vaut y_0 en x_0.
  Autrement dit : il existe une unique fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ et $F(x_0) = y_0$.

Remarque : pour déterminer des primitives, on peut reprendre le chapitre Fonctions 1E - Pratiques calculatoires, primitives.

Théorème.

Si $x_0 \in I$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur I : c'est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Démonstration : voir **exercice 1**.

1) Calcul d'une intégrale avec une primitive

Théorème.

Soient a et b dans un intervalle I, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Exemple : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ (*présentation à appliquer systématiquement !*)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t &= \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 \qquad \left(\text{car } t \mapsto \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \text{ est une primitive de } t \mapsto \tfrac{t}{1+t^2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln(1+1^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+0^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

2) Intégration par parties

Il se peut que l'on ne trouve pas de primitive avec les méthodes usuelles. On peut alors reconnaître dans une intégrale un produit de deux fonctions dont l'une a une primitive simple (par exemple e^x, ou un polynôme) et/ou l'autre a une dérivée simple (en général ln car elle devient une fraction rationnelle). On utilise alors la formule :

Propriété.

u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et a et b sont deux nombres de I.

Alors : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$

Justification de la formule : $\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Donc $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.

Or $x \mapsto u(x)v(x)$ est une primitive de $x \mapsto (uv)'(x)$, donc $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b$.

Donc $\displaystyle\big[u(x)v(x)\big]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.

Autrement dit $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$. □

Exemples classiques d'utilisation : $\displaystyle\int_1^4 (3x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\ \mathrm{d}x$

- $\displaystyle\int_1^4 (3x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x$: intégration par parties avec $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v(x) = 3x-1$
  $u'(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = 3$

$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x &= \left[(3x-1)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^4 - \int_1^4 3\frac{1}{2}e^{2x}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{11}{2}e^8 - e^2 - \left[\frac{3}{4}e^{2x}\right]_1^4\\ &= \frac{11}{2}e^8 - e^2 - \frac{3}{4}e^8 + \frac{3}{4}e^2\\ &= \boxed{\frac{19}{4}e^8 - \frac{1}{4}e^2}\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$: on fait une intégration par parties avec $u(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ et $v(x)=\ln(x)$

$u'(x)=x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int u'v=\Big[uv\Big]-\int uv'$, donc :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\Big(4\ln(2)-\ln(1)\Big)-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\\ &=2\ln(2)-\frac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2\\ &=2\ln(2)-\frac{1}{2}\left(2-\tfrac{1}{2}\right)\\ &=\boxed{2\ln(2)-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Astuces, conseils :

1. Avant de se lancer dans une intégration par parties, s'assurer que l'on ne peut pas trouver une primitive !

2. Écrire $u'(x)=$, $v(x)=$, $u(x)=$, $v'(x)$, et la formule, de sorte qu'il ne reste ensuite plus qu'à remplacer. Attention au signe $-$, utiliser des parenthèses !

3. Si il y a un logarithme, la plupart du temps il faut le dériver.

4. Si il y a une exponentielle ou un cosinus ou un sinus, il sera facile de l'intégrer comme de la dériver, donc regarder l'autre facteur : sera-t-il plus simple une fois dérivé ou une fois intégré ? choisir et faire l'autre opération à l'exponentielle ou le cosinus ou le sinus.

5. Avec un sin ou un cos il est parfois nécessaire de faire une 2ème intégration par parties, en continuant dans le même sens (voir exercice 5. G)

6. Toujours avoir à l'esprit que lors de l'application de cette technique, on doit quand même trouver une primitive (de uv'), il faut donc veiller à ce que ce uv' soit plus simple que la fonction de départ.

3) Changement de variable

Théorème.

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $\varphi(I)$.

Alors pour tous a et b dans I, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Justification de la formule : On note F une primitive de f.

Alors $\star$ $f(\varphi(t))\varphi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=(F\circ\varphi)'(t)$

donc $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\Big[F\circ\varphi(t)\Big]_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))$.

$\star$ $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))$

Donc l'égalité est vraie. □

Deux utilisations possibles de ce théorème :

1er cas : on reconnaît $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on connaît f. On est en fait ramené à une situation où on reconnaît le résultat d'une formule de dérivée de type composée : $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$ … (u jouant le rôle de φ).

2ème cas : l'énoncé nous suggère le changement de variable : $x=\varphi(t)$ alors on écrit « $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ » et on fait tous les remplacements (plus de t, que des x) sans oublier les bornes ! Une fois le changement de variable effectué, une formule connue apparaît.

Exemples :

- pour le 1er cas : $\displaystyle\int_0^1 (6t+1)e^{3t^2+t-1}\,\mathrm{d}t$: on pose $\varphi(t)=3t^2+t-1$, alors $\varphi'(t)=6t+1$.
  $\varphi(0)=-1$ et $\varphi(1)=3$
  Donc $\displaystyle\int_0^1 (6t+1)e^{3t^2+t-1}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^3 e^x\,\mathrm{d}x=e^3-e^{-1}$
- pour le 2ème cas : $I=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ on pose $x=\sin(t)$
  alors $\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t$
  $\sin(0)=0$ et $\sin(\frac{\pi}{2})=1$

$$\begin{aligned}
\text{Donc}\quad I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car si } t\in[0,\frac{\pi}{2}],\text{ alors }\cos(t)\geqslant 0\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t \qquad \text{(formule de trigonométrie)}\\
&=\tfrac{1}{2}\Big[t-\tfrac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\sin(2\tfrac{\pi}{2})\right)-0\\
&=\tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Méthode : toujours poser le changement de variable, $\mathrm{d}x=\ldots\,\mathrm{d}t$ et les bornes !

III. Une application des intégrales : approximation de fonctions, inégalités

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$, soient a et x dans I et $n\in\mathbb{N}$:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\tfrac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ldots+\tfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit : $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé ***reste intégral d'ordre*** n.

Démonstration par récurrence.

Application : on applique la formule de Taylor avec reste intégral en 0 au rang n pour la fonction f définie par $f(x)=e^x$.
Pour tout n, $f^{(n)}(x)=e^x$ donc $f^{(n)}(0)=1$.
Donc $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$ autrement dit $e^x-(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!})=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t.$
On note $R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$ (reste intégral d'ordre n).
On étudie le cas où $x\geqslant 0$: pour tout t de $[0,x]$, $e^t\leqslant e^x$ (car exp est croissante).
Ainsi, $\forall t\in[0,x]$, $\dfrac{(x-t)^n}{n!}e^t\leqslant\dfrac{(x-t)^n}{n!}e^x$
et donc, par croissance de l'intégrale avec $0\leqslant x$: $R_n(x)\leqslant\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^x\,\mathrm{d}t$
Or $\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^x\,\mathrm{d}t=e^x\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t=e^x\Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_0^x=e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$
De plus, $R_n(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$.
Donc $0\leqslant e^x-(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!})\leqslant e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Interprétations :

- Pour x fixé si n tend vers $+\infty$, $e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers 0 (admis), donc $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ avec d'autant plus de précision que n est grand.
- Si n est fixé et que x tend vers 0, on a le même résultat, donc l'approximation est aussi valable avec un n donné, et d'autant plus précise que le x est très proche de 0.