Espaces vectoriels C.

Exercice 1.

1. On pose $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=0\}$.
Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

(a) Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F \cup G$.

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et H_1 et H_2 des hyperplans (c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$) que l'on suppose distincts.
Démontrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Exercice 3.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $a=(1,0,1)$ et $b=(2,1,0)$, et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $c=(1,1,1)$.
Déterminer $F \cap G$ et $F+G$.

2. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, soient $u=(1,2,3,4)$, $v=(1,1,1,3)$, $w=(2,1,1,1)$, $x=(-1,0,-1,2)$ et $y=(2,3,0,1)$. On note $F=\text{vect}(u,v,w)$ et $G=\text{vect}(x,y)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$?

Exercice 4.

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1)=0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.

2. Montrer que l'espace vectoriel F des polynômes constants est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5.

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonction impaires.

1. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que P et I sont supplémentaires.

* Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
On note $F = \{f \in E \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer un supplémentaire.

Exercice 7.

Soit F la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{v} = (1,0,2)$.
Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8.

1. Soit E l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x-y+2z=0$.
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
Compléter la base trouvée pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

2. Mêmes questions avec l'ensemble F des vecteurs (x,y,z) tels que $ax+by+cz=0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Exercice 9.

On pose $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$.
A-t-on $A+B = \mathbb{R}^3$? et $A \oplus B = \mathbb{R}^3$?