Espaces vectoriels C

Intersections et sommes de sous-espaces vectoriels.

I. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

$\star$ F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux le neutre de E.
Donc $F \cap G$ contient le neutre de E.

$\star$ Soient u et v deux éléments de $F \cap G$, et λ dans $\mathbb{K}$, montrons que $u + \lambda v \in F \cap G$.
u et v sont dans $F \cap G$, donc ils sont dans F.
Or F est un sous-espace vectoriel de E donc il est stable par combinaison linéaire.
Donc $u + \lambda v \in F$.

De même, G étant un sous-espace vectoriel de E, $u + \lambda v \in G$.

Donc $u + \lambda v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - 3x + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + z = 0\}$
F et G sont des plans vectoriels de l'espace.
$F \cap G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right. \right\}$: il s'agit d'une droite vectorielle de l'espace.

Propriété.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Alors $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention : le plus souvent, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel !

II. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

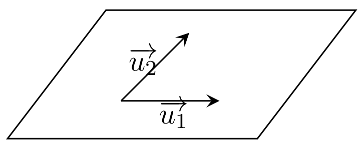
1) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On note $F + G$ l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Ainsi, $F + G = \{u + v \,|\, u \in F \text{ et } v \in G\}$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux droites vectorielles F et G engendrées par des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
En fait, $F = \{\lambda \overrightarrow{u_1} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\mu \overrightarrow{u_2} \,|\, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Donc $F + G = \{\lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$: c'est le plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
On remarque que $F + G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ (plan engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$).



Propriété.

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F + G$ est le plus petit sous-espace de E qui contient $F \cup G$.

Preuve : voir l'exercice 1.

Traduction du second point : si un sous-espace vectoriel de E contient $F \cup G$, alors il contient aussi $F + G$.

2) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.
La somme $F+G$ est dite ***directe*** lorsque la décomposition $x=u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
On note alors $F \oplus G$.

Propriété.

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Démonstration :
Précision préliminaire : $F \cap G$ est un espace vectoriel, donc il contient au moins le vecteur nul, ainsi, montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ revient à montrer que $F \cap G \subset \{\mathbf{0}\}$.

$\star$ « $\Rightarrow$ » : supposons que F et G soient en somme directe, et montrons qu'alors $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
Soit $x \in F \cap G$. (*on va montrer que* $x = \mathbf{0}$)
$x \in F$ et $\mathbf{0} \in G$ donc $x = x + \mathbf{0}$ est une décomposition de x dans la somme $F+G$.
De même, $x = \mathbf{0} + x$ en est une autre car $\mathbf{0} \in F$ et $x \in G$.
Or cette décomposition est unique par hypothèse.
Donc $x = \mathbf{0}$.
Donc le seul élément de $F \cap G$ est le vecteur nul. $\square$

$\star$ « $\Leftarrow$ » : supposons que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, et montrons que F et G sont en somme directe.
Soit x dans $F+G$, on note $x=u+v$ et $x=u'+v'$ deux décompositions de x dans la somme $F+G$.
Alors, $u+v=u'+v'$, donc $u-u'=v'-v$.
Or u et u' sont dans F, donc $u-u'$ est dans F (stable par combinaison linéaire).
De même, $v'-v \in G$.
Comme ces deux vecteurs sont égaux, ils sont dans $F \cap G$, qui ne contient que $\mathbf{0}$, donc $u-u'=\mathbf{0}$ donc $u=u'$ et $v=v'$.
Donc la décomposition de x dans $F+G$ est unique.
Donc F et G sont en somme directe. $\square$

Exemple : $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = (-1,2,0)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-2y=0\}$, montrons que F et G sont en somme directe.

Soit $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $\overrightarrow{v} \in F \cap G$.
$\overrightarrow{v} \in F$ donc il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u} = (-\lambda, 2\lambda, 0)$.
Or $\overrightarrow{v} \in G$ donc $-\lambda - 2 \times 2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Donc $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Donc F et G sont en somme directe.

Méthode : pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on prend un vecteur dans l'intersection, et on montre que c'est nécessairement le vecteur nul.

3) Somme en dimension finie

Propriété : formule de Grassmann.

E un espace vectoriel, et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.
Alors $F+G$ est de dimension finie et $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple (suite) : avec F et G de l'exemple précédent, on a déjà montré qu'ils sont en somme directe.

De plus, G est un plan vectoriel, de dimension 2, et F est une droite, de dimension 1.
Donc d'après la formule de Grassmann, $\dim(F \oplus G) = 1 + 2 = 3$.

Or $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3.
Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Propriété : base et somme directe.

- Si F et G sont en somme directe, avec $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G, alors la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$.
- Si $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe : $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemple (suite et fin) : toujours les mêmes F et G.

$G = \left\{(2y, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(2,1,0) + z(0,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$,
avec $\overrightarrow{v_1} = (2,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0,0,1)$.
$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de G.
Et $\overrightarrow{u}$ est une base de F.
Donc d'après la propriété, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $F \oplus G$ (on dit parfois « obtenue par recollement »).

Or on a montré que $F \oplus G$ est égal à $\mathbb{R}^3$.
Donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On dit que cette base est ***adaptée à la décomposition en somme directe***.

III. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

1) Cas général

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.
Lorsque la somme $F + G$ est directe et que $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont ***supplémentaires***.

Exemple 1 : on note $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Alors d'après le 2ème point de la propriété ci-dessus, le plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la droite dirigée par $\overrightarrow{k}$ sont en somme directe, de plus leur somme est $\mathbb{R}^3$ donc ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, tout vecteur de l'espace peut être décomposé de manière unique en somme d'un vecteur du plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{k}$.

Exemple 2 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, et soient F le sous-espace vectoriel de E formé des suites convergeant vers 0, et G celui des suites constantes.
On va montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

⋆ Soit (u_n) une suite de $F \cap G$.
$(u_n) \in G$ donc (u_n) est constante, on note c sa valeur, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = c$.
Or $(u_n) \in F$, donc $c = 0$.
Donc (u_n) est la suite nulle.
Donc $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

⋆ Soit (u_n) une suite de E, montrons qu'il existe deux suites (v_n) et (w_n) avec $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ telles que $(u_n) = (v_n) + (w_n)$.
Analyse : supposons que l'égalité $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ soit vraie, avec $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$.
On sait que $(u_n) \in E$ donc converge et $(v_n) \in F$ donc converge vers 0, et (w_n) est constante.
Donc en passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 + w_0$.
on vient de trouver la valeur de la suite constante : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Synthèse : on définit la suite (w_n) comme étant la suite constante égale à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Et on pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - w_n$.
Vérifions que les suites (v_n) et (w_n) satisfont les critères :
⋆ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - w_0 = 0$ par construction de (w_n), donc (v_n) appartient à F.
⋆ (w_n) est constante donc appartient à G.
⋆ $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - w_n$ donc $u_n = v_n + w_n$ soit $(u_n) = (v_n) + (w_n)$.
Nous venons donc de construire deux suites (v_n) et (w_n) respectivement dans F et G, telles que $(u_n) = (v_n) + (w_n)$.
Donc $E = F + G$.

Finalement, $E = F \oplus G$.

Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :
1. montrer $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$: on prend un élément de l'intersection et on montre qu'il est nécessairement nul ;
2. montrer $E = F + G$: on prend un élément de E et on cherche à l'exprimer comme une somme d'un élément de F et un élément de G. (*on peut alors raisonner par analyse et synthèse*)

Attention : ne pas confondre supplémentaire (notion liée aux sous-espaces vectoriels) et complémentaires (notion liée aux ensembles).

2) Supplémentaires en dimension finie

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $E = F \oplus G$
(ii) $E = F + G$ et $\dim(E)$ =$\dim(F)$+$\dim(G)$
(iii) $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ et $\dim(E)$ =$\dim(F)$+$\dim(G)$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = z\}$.
Montrons que F et G sont supplémentaires.
⋆ Montrons que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

$$(x, y, z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x + x + 2x = 0 \\ x = y = z \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Donc $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
⋆ F est un plan vectoriel, il est donc de dimension 2.
G est une droite vectorielle, de dimension 1 (vecteur directeur $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1)$).
Donc $\dim(F) + \dim(G) = 3$
Or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc ces deux critères permettent d'affirmer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires <u>en dimension finie</u> :
1. montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul ;
2. montrer que la somme de leurs dimensions est la dimension de l'espace.

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F a un supplémentaire G dans E qui vérifie alors $\dim(G)$ =$\dim(E)$−$\dim(F)$.

Démonstration :
F est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, donc F est de dimension finie.
Donc F a une base, on la note $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.
La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est donc libre.
Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ telle que $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ soit une base de E.
On définit alors le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, \ldots, g_q)$.
Alors, d'après la propriété sur les bases et somme directe, F et G sont en somme directe,
et $F \oplus G = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) = E$.
Donc G est bien un supplémentaire de F.
Et $p + q = \dim(E)$, donc $q = \dim(E) - p$ soit $\dim(G)$ =$\dim(E)$−$\dim(F)$. □

Réparation d'un oubli

Propriété.

Toute famille libre de polynômes non nuls de degrés échelonnés (tous différents) est libre.

Exemples :
- $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 3$ et $P_3 = X^4$: les degrés sont échelonnés donc la famille est libre.
- Pour tout k entre 0 et n, on définit $P_k = X^k(X + 1)(X - 2)$.
  Alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k + 2$. Les degrés sont échelonnés donc la famille $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.