Espaces vectoriels B.

Exercice 1.

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants et en donner une base :

$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$

$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2y = 3z\}$

$F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$

$F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 4y + 2z - t = 0\}$

Exercice 2.

On considère les vecteurs $x = (1, 1, 3)$ et $y = (2, -2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la dimension de $\text{Vect}(x, y)$.

2. Montrer que x et y engendrent le même sous-espace vectoriel que $u = (1, -3, -2)$ et $v = (1, 5, 8)$.

Exercice 3.

Soients $f_1 = (1, 0, 0, 0)$ $f_2 = (1, 1, 1, 0)$ $f_3 = (0, -2, -2, 0)$ $f_4 = (0, 0, 0, 1)$ $f_5 = (3, 1, 1, 2)$, et on note $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

1. Déterminer la dimension de F.

2. Extraire de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ une base de F.

Exercice 4.

Déterminer les rangs des familles suivantes :

1. dans $\mathbb{C}^3$: $u = (1 + i; 1; 0)$, $v = (0; 1 - i; 1)$, $w = (-2; 3 + i; 2 + 2i)$;

2. dans $\mathbb{R}^3$: $u = (-4; 9; 2)$, $v = (2; a; -1)$ et $w = (b; 18; 4)$ (le rang dépend de a et b) ;

Exercice 5.

Dans $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ on définit quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 par :

$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f_1 et f_2 forment une famille libre.

2. Déterminer les expressions de $f_1 - f_2$ et $f_1 + f_2$.

3. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 6.

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère les polynômes $P_1 = X^2 - X$, $P_2 = X^2 + X$ et $P_3 = X^2 - 1$.

1. Montrer que ces trois polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $\left(\frac{P(-1)}{2}; \frac{P(1)}{2}; -P(0)\right)$.