Espaces vectoriels B
Dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition.
Un espace vectoriel E est de ***dimension finie*** si il existe dans E une famille génératrice finie.
Sinon, il est de dimension infinie.

Exemples :
- L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie :
$(1,0,0),(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ (car c'est une base), donc $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie.
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie : supposons qu'il ait une famille génératrice finie P_1, P_2, $\dots P_n$. On pose $r=\max\{\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n\}$.
$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, $\deg\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k\right)\leqslant r$.
En particulier, X^{r+1} ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de $(P_1,P_2,\dots,P_n)$.
C'est absurde.
Donc $\mathbb{R}[X]$ n'a pas de famille génératrice finie, donc est de dimension infinie.

I. Dimension finie et base

Théorème de la base extraite.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
De toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille qui sera une base de E.
En particulier, cela montre que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Théorème de la base incomplète.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
Toute famille libre de E peut être complétée pour former une base de E.

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{u}=(1,0,1)$ et $\overrightarrow{v}=(1,-1,1)$. Nous allons montrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une famille libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille est libre : soient λ et μ des réels tels que $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.
Alors, $\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ -\mu=0\\ \lambda+\mu=0\end{cases}$ donc d'après la ligne 2, $\mu=0$ et donc dans la ligne 1, on obtient $\lambda=0$.
Donc la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est celle avec les deux scalaires nuls, donc la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre.
- Géométriquement, puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on sait que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On vérifie de manière algébrique :
On note $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, après calcul, $\overrightarrow{w}=(1,0,-1)$
Soit $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, montrons qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ tel que $\overrightarrow{a}=\lambda_1\overrightarrow{u}+\lambda_2\overrightarrow{v}+\lambda_3\overrightarrow{w}$ $(*)$.
$$(*)\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x\\ \quad -\lambda_2 \quad =y\\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=z\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x\\ \quad -\lambda_2 \quad =y\\ \quad -2\lambda_3=z-x \qquad L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$
Ce système est de rang 3 avec 3 lignes et 3 colonnes.
Donc il a donc une unique solution, quels que soient x, y et z.
Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une unique combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.
Donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété et définition.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul, alors toutes les bases de E ont même cardinal (nombre de vecteurs), et ce cardinal est appelé ***dimension*** de l'espace vectoriel E, noté $\dim(E)$.
Par convention, la dimension de l'espace vectoriel $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est 0.

Exemples à retenir :

- Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.
  En effet, une droite est engendrée par un seul vecteur non nul.
- Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.
  Un plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre).
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
  la base usuelle est $(1; i)$: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy$.

Propriété : dimensions des espaces vectoriels usuels.

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
  La base canonique est formée des vecteurs $(1, 0, \dots, 0),\ (0, 1, 0 \dots, 0),\ \dots\ ,(0, 0, \dots, 1)$.
- le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.
  La base canonique est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$.
  La base canonique est $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ avec $E_{i,j}$ la matrice nulle partout sauf le coefficient de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Propriété.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
De plus $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

II. Dimension finie et familles

1) liée, génératrice, base et dimension

Propriété.

Soit E un espace vectoriel de dimension n :
- toute famille de m vecteurs avec $m > n$ est liée ;
- aucune famille de p vecteurs avec $p < n$ ne peut être génératrice ;
- toute famille libre de n vecteurs est une base ;
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Exemple : montrer que $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 3 + X$ et $P_3 = -X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On va montrer que la famille est libre.

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \mathbf{0}$.
Alors $(\lambda_1 + 3\lambda_2)1 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_3)X^2 = \mathbf{0}$.
Or $(1, X, X^2)$ étant une famille libre, on a $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$: $L_2 - L_1$ donne $-2\lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$, et donc d'après L_1, $\lambda_1 = 0$, et donc $\lambda_3 = 0$.

Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.

Or elle est formée de 3 vecteurs, et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
Donc (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) rang d'une famille de vecteurs

Définition.

On appelle ***rang d'une famille de vecteurs*** la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
Concrètement, si $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$.

Propriété.

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans une base.

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $P_1 = 1 - X + X^2$, $P_2 = -1 + X + 3X^2$ et $P_3 = -1 + X + X^2$, et déterminons le rang de la famille (P_1, P_2, P_3).

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: 1, X, X^2, les coordonnées des polynômes sont respectivement : $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 3)$ et $(-1, 1, 1)$.

La matrice des coordonnées en colonnes est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

A est donc de rang 2, donc la famille (P_1, P_2, P_3) est de rang 2.

Remarques :

- $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p \iff$ la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre.
- Dans un espace vectoriel E de dimension n :
  $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = n \iff$ la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice de E.