Espaces vectoriels A.

* Exercice 1.

Soient $(E, +_E, .)$ et $(F, +_F, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On définit une addition sur $E \times F$ par $(u, v) + (u', v') = (u +_E u', v +_F v')$ (addition par composante), et la multiplication par un scalaire $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (multiplication de chaque composante).
Vérifier que $E \times F$ muni de ces deux opérations est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\}$

$B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$

$C = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1\}$

$D = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est convergente}\}$.

Exercice 3.

Pour chacun des ensembles ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou pas.

$$A = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 = y^2 \right\}$$

$$C = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad D = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \text{ et } x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

Exercice 4.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{C}$?

3. $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ s'annule au moins une fois}\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = b + c \right\}$?

2. B ensemble des matrices carrées diagonales de taille 3 ?

3. C ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$?

4. D ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$?

* Exercice 6.

Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7.

On considère l'équation différentielle $y' + 2x^3 y = 0$ d'inconnue la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{S}$.

Exercice 8.

Soient $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 3, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée.

Exercice 9.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est libre, liée, génératrice, si elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $v_1 = (1, 2, 3)$

2. $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (4, 5, 6)$

3. $v_1 = (1, 2, 3)$; $v_2 = (4, 5, 6)$ et $v_3 = (0, 0, 0)$

4. $v_1 = (1, 2, 3)$; $v_2 = (0, 4, 5)$; $v_3 = (0, 0, 6)$ et $v_4 = (7, 8, 9)$

Exercice 10.

Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? de l'espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère la famille (u, v) où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$ et $v_n = n + 1$;

2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la famille (A, B, C) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille considérée est (f_1, f_2, f_3) où $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = e^{kx}$.

Exercice 11.

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant sous la forme de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3y + 4z = 0\}$

2. $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f'' + f = 0\}$

3. $C = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,|\, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a + 2b & b \\ 3a - b & a \end{pmatrix} \right\}$

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$

Exercice 12.

1. **(a)** Déterminer l'ensemble F des solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{array} \right.$.

(b) Justifier que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

2. On considère les deux plans vectoriels P_1 et P_2 d'équations respectives $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$. Trouver un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrée de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

3. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.