II. Familles de vecteurs

1) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, familles génératrices

Définition.

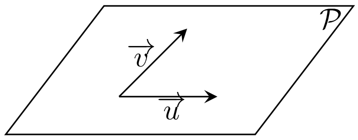
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(u_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (u_k). On le note $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Ainsi, $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$.

Exemples :

- Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de l'espace, alors $\text{Vect}(\overrightarrow{v}) = \{\lambda\overrightarrow{v},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, c'est une ***droite vectorielle***, de direction $\overrightarrow{v}$, c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{v}$.

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$,
alors $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$,
c'est un ***plan vectoriel***.



- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 est un espace vectoriel :
par exemple dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles r_1 et r_2, on rappelle que $\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$, c'est une partie de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui est un espace vectoriel.
En fait, en posant $f_1 : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{r_2 t}$, on peut écrire $\mathcal{S} = \text{Vect}(f_1, f_2)$, donc $\mathcal{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition.

Dans un espace vectoriel E, une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est dite ***génératrice*** de E si elle engendre E, c'est-à-dire $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = E$.
Autrement dit, tout vecteur v de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall v \in E, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$$

Exemple : la famille formée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est-elle génératrice du plan $\mathbb{R}^2$?

Soit $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, peut-on trouver λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{m}$?

$$\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{m} \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = a\\ \lambda - \mu = b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rll}\lambda + \mu &= a & \\ -2\mu &= b - a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\end{array}\right.$$

Le système est donc compatible, il a une solution, donc $\overrightarrow{m}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Ceci est vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{m}$ de $\mathbb{R}^2$, donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice d'un espace vectoriel E :
  - ⋆ « Soit v dans E, montrons qu'il existe λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si le rang est n, alors la famille est génératrice.
- Pour montrer que la famille n'est pas génératrice :
  - ⋆ On trouve un vecteur v qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_p$:
  « on pose $v = \ldots$, montrons qu'il n'existe pas de λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si le rang n'est pas n, alors la famille n'est pas génératrice.

Propriété.

Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice du même espace vectoriel.

Par exemple : si (u, v, w) est une famille génératrice de E, alors pour tout vecteur x, (u, v, w, x) est aussi génératrice de E.

2) Familles libres, liées

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est ***libre*** si la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est celle dont les scalaires sont tous nuls.
  Autrement dit : . $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0.$
- Une famille qui n'est pas libre est ***liée***, autrement dit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée si il existe une combinaison linéaire égale au vecteur avec au moins un scalaire non nul.
  Autrement dit : il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ non tous nuls, tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0.$

Exemples :

- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on va montrer que cos et sin forment une famille libre.
  Soient λ et μ des réels tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$.
  Cela se traduit par : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$.
  En particulier, pour $x = 0$, $\lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda = 0$.
  Et alors, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $0 + \mu \times 1 = 0$ donc $\mu = 0$.
  Donc la seule combinaison linéaire de cos et sin qui soit égale à la fonction nulle, est celle dont les deux scalaires sont nuls.
  Donc la famille $(\cos, \sin)$ est libre.

- Dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ forment-elles une famille libre ?
  Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 des réels tels que $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  $$\text{Alors} \left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \text{(coefficient en haut à gauche)} \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \text{(coefficient en haut à droite)} \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \text{(coefficient en bas à gauche)} \\ \lambda_4 = 0 & \text{(coefficient en bas à droite)} \end{array} \right.$$
  La seule solution du système est $(0, 0, 0, 0)$, donc la famille (A, B, C, D) est une famille libre.

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires.
- Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs forment une famille liée signifie qu'ils sont coplanaires.

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre :
  - ⋆ « Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$.
    Montrons qu'alors, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$ »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si ce rang est p, alors la famille est libre.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée :
  - ⋆ Trouver explicitement des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, dont au moins n'est pas nul, et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$.
    « On pose $\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots, \ldots, \lambda_p = \ldots$: ils ne sont pas tous nuls et $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$. (*à justifier*)
    Donc la famille est liée. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée des vecteurs en colonne : si ce rang n'est pas p, alors la famille est liée.

Propriété.

Toute famille contenant une famille liée est liée.
Toute famille contenue dans une famille libre est libre.

Par exemple : si u et v forment une famille liée, alors quel que soit w, la famille (u, v, w) sera liée.
Si (u, v, w, x, z) est une famille libre, alors, entre autres, (u, v, x, z) est libre ...

3) Bases

Définition.

Une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Propriété : caractérisation des bases.

Soit $(e_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(e_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E ;

(ii) tout vecteur v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\forall v \in E,\ \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Remarque : l'existence de la combinaison linéaire résulte du fait que la famille est génératrice, et l'unicité du fait que la famille est libre.

Vocabulaire : si l'on note $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une base, alors, dans la décomposition $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ les nombres λ_k sont appelés les ***coordonnées de*** v ***dans la base*** $\mathcal{B}$.

Exemples à retenir :

- la base ***canonique*** du plan $\mathbb{R}^2$ est $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  Si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
- de même, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est formée de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots$ et $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.
  Dans $\mathbb{R}^4$: si $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t)$, alors $\overrightarrow{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$.
- dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la base canonique est formée des $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

  Pour $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, la base canonique est $E_{1,1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Méthode

Que faire avec une égalité du type $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$?

- ⋆ dans un espace de type $\mathbb{K}^n$: cette égalité se traduit en un système à n équations (une équation par coordonnée) ;
- ⋆ dans un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,m}$: même chose, avec $n \times m$ équations (une équation par « position » dans la matrice) ;
- ⋆ dans un espace de fonctions définies sur I, elle se traduit par autant d'équations que de x dans I :
  $$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p \iff \forall x \in I,\ v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \dots + \lambda_p u_p(x)$$
  pour trouver des relations sur les λ_k, on peut choisir les valeurs de x qui nous arrangent (ou éventuellement dériver les fonctions, regarder leurs limites ...)
  mais attention l'égalité de départ sera vraie si la relation est vraie pour TOUS les x.
- ⋆ dans un espace de suites : idem, une équation par valeur d'indice.