

# ESPACES VECTORIELS A

## Généralités

La notion d'espace vectoriel naît petit à petit au cours du 19ème siècle, dans le but de formaliser l'espace qui nous entoure, mais ils permettent aussi de mieux visualiser des théories plus abstraites.

Dans un premier temps, le vecteur algébrique, en coordonnées, permet de résoudre des problèmes géométriques sans figures (dans le même état d'esprit, la géométrie descriptive de Gaspard Monge (1746 - 1818) contribue à évacuer la figure en transformant son mode de représentation, pour, disait-il, s'affranchir « de cette complication des figures dont l'usage distrait de l'attention qu'on doit au fond des idées »).

Ce sont Hermann Grassmann (1809-1877), puis Giuseppe Peano (1848-1932) qui formalisent les opérations sur les vecteurs, et permettent d'axiomatiser les espaces vectoriels.

Parallèlement, Arthur Cayley introduit les matrices, et les opérations sur les  $n$ -uplets, ouvrant la voie à des dimensions plus grandes que 3.

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I. Espaces et sous-espaces vectoriels

#### Définition.

Un  $\mathbb{K}$ -*espace vectoriel* est un ensemble  $E$  non vide muni :

\* d'une loi d'addition entre ses éléments, notée + vérifiant :

- $\forall(u, v) \in E^2, u + v \in E$  (loi **interne**)
- $\forall(u, v) \in E^2, u + v = v + u$  (la loi est .....
- $\forall(u, v, w) \in E^3, (u + v) + w = u + (v + w)$  (la loi est .....
- $\exists e \in E, \forall u \in E, u + e = u$  et  $e + u = u$  ( $e$  est le neutre de l'addition, on le note en général  $0_E$ )
- $\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = e$  ( $u'$  est l'opposé de  $u$ , noté  $-u$ )

\* d'une loi de multiplication d'un élément de  $\mathbb{K}$  par un élément de  $E$ , notée . vérifiant :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$  (loi **externe** sur  $E$ )
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall u \in E, (\lambda\mu) \cdot u = \lambda(\mu u)$
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \forall(u, v) \in E^2, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$  (. est **distributive** par rapport à +)
- $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$

**Vocabulaire** : les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs**, et les éléments de  $\mathbb{K}$  des **scalaires**.

On écrit parfois  $(E, +, \cdot)$  pour désigner l'ensemble  $E$  et les deux opérations associées.

#### 1) Exemples d'espaces vectoriels de référence

##### a. les ensembles $\mathbb{K}^n$

- L'ensemble des vecteurs du plan  $\mathbb{R}^2$  muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication par un scalaire est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Les éléments sont définis par leurs coordonnées  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

\* loi d'addition interne :  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$  ;  
le neutre est ...

\* loi de multiplication externe :  $\lambda \vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ .

Quelques justifications :

- De même pour les vecteurs de l'espace :  $\mathbb{R}^3$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ;
- et on peut aussi étendre cette propriété à tous les ensembles  $\mathbb{K}^n$  :

$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des deux opérations :

- \* loi d'addition interne :  $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$  ;  
le neutre est ...
- \* loi de multiplication externe :  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

### b. l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  muni de l'addition des matrices (terme à terme) et de la multiplication par un scalaire (terme à terme), est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Le neutre de l'addition est ....

### c. l'ensemble des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ (on se restreint à suites et fonctions)

- L'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , noté  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , muni des deux opérations ci-dessous est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
  - \* loi d'addition interne :  $(u_n) + (v_n)$  est la suite de terme général  $u_n + v_n$  ;  
le neutre est ...
  - \* loi de multiplication externe :  $\lambda(u_n)$  est la suite de terme général  $\lambda u_n$ .
- L'ensemble des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , noté  $\mathbb{K}^I$ , muni des deux lois ci-dessous est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
  - \* loi d'addition interne :  $f + g$  est définie pour tout  $x$  de  $I$  par  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  ;  
le neutre est ...
  - \* loi de multiplication externe :  $\lambda.f$  est définie pour tout  $x$  de  $I$  par  $(\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$ .

### d. produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient  $(E, +, .)$  et  $(F, +, .)$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, on définit :

\* loi d'addition interne :  $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$  (addition par composante) ;  
le neutre est ...

\* loi de multiplication externe :  $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$  (multiplication de chaque composante).

Alors  $E \times F$  muni de ces deux opérations est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Preuve dans l'**exercice 1**.

**Remarque :** on peut étendre cette définition à  $n$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E_1, E_2, \dots, E_n$  :  $\prod_{k=1}^n E_k$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec les opérations définies par composante.

## 2) Sous-espaces vectoriels

### Définition d'une combinaison linéaire (rappel).

$(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ , et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires.

Alors le vecteur  $\lambda u + \mu v$  est une **combinaison linéaire** de  $u$  et  $v$ .

- Soient  $n$  vecteurs de  $E$  :  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et des scalaires :  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Alors  $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$  est une **combinaison linéaire de la famille**  $(u_k)_{k \in [1, n]}$ .

### Exemples :

- Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs de la base, alors  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :  $\vec{u} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$ .
- Dans l'espace des suites à valeurs réelles, la suite  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times 3^n - 2e^n$  est une combinaison linéaire des suites  $(3^n)$  et  $(e^n)$ .

### Définition d'un sous-espace vectoriel.

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- ★  $F$  n'est pas vide ;
- ★  $F$  est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire  $\forall (u, v) \in F^2$  et  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F$ .

### Exemples :

- $(\mathbb{R}^+)^2$  ensemble des vecteurs à coordonnées positives, est une partie de  $\mathbb{R}^2$ , mais ce n'est pas un sous espace vectoriel, en effet :

- Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , le plan vectoriel  $F$  d'équation  $2x + y - 3z = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  :

- Si  $E$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors  $F$  défini par  $F = \{f \in E, f(1) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  :

### Propriété.

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

**Conséquence :** pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on cherche un espace vectoriel de référence qui le contient, et on montre qu'il est un sous-espace de cet espace connu :

### Propriété.

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit  $F$  une partie de  $E$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $\left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F \end{array} \right.$

**Exemple :** l'ensemble noté  $F$  des suites arithmétiques à valeurs réelles est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

## II. Familles de vecteurs

### 1) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, familles génératrices

#### Définition.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par la famille**  $(u_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs  $(u_k)$ . On le note .....

Ainsi, .....

#### Exemples :

- Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul de l'espace, alors  $\text{Vect}(\vec{v}) = \{\lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , c'est une **droite vectorielle**, de direction  $\vec{v}$ , c'est l'ensemble des vecteurs .....
  - Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ , c'est un **plan vectoriel**.
  - L'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 est un espace vectoriel : par exemple dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles  $r_1$  et  $r_2$ , on rappelle que  $\mathcal{S} = \{ \dots \}$
- .....  
.....  
.....

#### Définition.

Dans un espace vectoriel  $E$ , une famille de vecteurs  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est dite **généatrice** de  $E$  si ...

.....

Autrement dit, tout vecteur  $v$  de  $E$  .....

**Exemple :** la famille formée par  $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est-elle génératrice du plan  $\mathbb{R}^2$  ?

### Propriété.

Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice du même espace vectoriel.

**Traduction :** si  $(u, v, w)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors pour tout vecteur  $x$ ,  $(u, v, w, x)$  est aussi génératrice de  $E$ .

## 2) Familles libres, liées

### Définition.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Une famille de vecteurs  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est **libre** si .....  
.....  
Autrement dit : .....
- Une famille qui n'est pas libre est **liée**, autrement dit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est liée si .....  
.....  
Autrement dit : .....

### Exemples :

- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , cos et sin forment une famille libre :  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

- Dans  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ , les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  forment-elles une famille libre ?

- Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si .....
- Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , trois vecteurs forment une famille liée signifie .....

### Propriété.

Toute famille contenant une famille liée est liée.

Toute famille contenue dans une famille libre est libre.

**Traduction :** si  $u$  et  $v$  forment une famille liée, alors quel que soit  $w$ , la famille  $(u, v, w)$  sera liée.

Si  $(u, v, w, x, z)$  est une famille libre, alors, entre autres,  $(u, v, x, z)$  est libre ...

### 3) Bases

#### Définition.

Une base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est une famille de vecteurs de  $E$  qui est libre et génératrice.

#### Propriété : caractérisation des bases.

Soit  $(e_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  une famille d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

**(i)** la famille  $(e_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est une base de  $E$  ;

**(ii)** tout vecteur  $v$  de  $E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

.....

**Remarque :** l'existence de la combinaison linéaire résulte du fait que la famille est génératrice, et l'unicité du fait que la famille est libre.

**Vocabulaire :** si l'on note  $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  une base, alors, dans la décomposition  $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$  les nombres  $\lambda_k$  sont appelés les *coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$* .

#### Exemples à retenir :

- la base *canonique* du plan  $\mathbb{R}^2$  est  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- de même, la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est formée de  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$  ... et  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ .
- dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , la base canonique est formée des  $n \times p$  matrices  $E_{i,j}$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne  $i$  et la colonne  $j$  qui vaut 1.  
Pour  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ , la base canonique est