Dérivabilité.

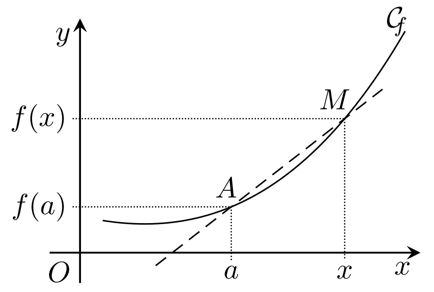
La dérivée est un outil de **calcul infinitésimal**.
Le nombre dérivé a été conceptualisé par GW. Leibniz (1646-1716) et I. Newton (1642-1727), ce dernier le décrivant comme ≪ le quotient ultime de deux accroissements évanescents ≫. C'est à JL. Lagrange (1736-1813) que l'on doit le nom de **dérivée** et la notation $f'(x)$.

I. Dérivation

1) Dérivabilité en un point

a. taux d'accroissement (cf. dérivation numérique, méthode d'Euler)

L'accroissement moyen de la courbe sur un intervalle représente en quelque sorte la ≪ pente moyenne ≫ de la courbe sur cet intervalle.



On note A le point de la courbe d'abscisse a : $A(a, f(a))$, et B le point de la courbe d'abscisse x : $M(x, f(x))$.

L'***accroissement moyen*** (ou ***taux d'accroissement***) de la fonction f entre a et x est la pente de la droite (AM).
Il se calcule par la formule $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Si l'on pose $x = a + h$ avec h non nul, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemples : L'accroissement moyen de la fonction carré entre 3 et 4 est $\dfrac{4^2-3^2}{4-3} = \dfrac{16-9}{1} = 7$

Le taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3+h$ est :
$\dfrac{(3+h)^2-3^2}{(3+h)-3} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$.

On remarque que lorsque h devient très proche de 0, le point M se rapproche du point A, et la droite (AM) devient tangente à la courbe en A : la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est alors la pente de cette tangente, que l'on appelle ***nombre dérivé de la fonction en*** a.

Suite de l'exemple : La limite du taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3+h$ lorsque h tend vers 0 est 6.
Ce nombre correspond bien au nombre dérivé de la fonction carré en 3, obtenu par le calcul 2×3^1.

b. dérivabilité en a

Définition.

> Une fonction f est ***dérivable*** en un nombre a de $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
> Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$, c'est le ***nombre dérivé de*** f ***en*** a.

Remarque : $f'(a)$ est aussi égal à $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsqu'elle existe et est finie.

Dérivabilité de la fonction racine carré :

- en $a \in]0, +\infty[$:
  taux d'accroissement en a : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.
  limite du taux d'accroissement : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
  Donc la fonction racine carrée est dérivable en a et le nombre dérivé en a est $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- en 0 :
  par le même calcul, on voit que le taux d'accroissement en 0 est égal à $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
  Et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

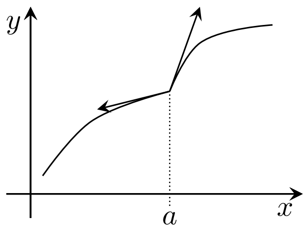
c. dérivabilité à gauche et à droite

Définition.

Soit f définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est ***dérivable à droite*** en a lorsque $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
On note alors $f'_d(a)$ cette limite.

On dit que f est ***dérivable à gauche*** en a lorsque $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
On note alors $f'_g(a)$ cette limite.



Propriété.

- Si a n'est pas un bord de I, alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.
  Alors $f'(a) = f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$).
- Si a est le bord supérieur de I ($I = ..., a]$ ou $..., a[$), alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a.
- Si a est le bord inférieur de I ($I = [a, ...$ ou $]a, ...$), alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a.

Exemple : on note f la fonction valeur absolue, est-elle dérivable en 0 ?

Le taux d'accroissement en 0 est $\frac{|h|-|0|}{h}$ soit $\frac{|h|}{h}$.
Or, si $h \leqslant 0$, $|h| = -h$ donc $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1$.
Et $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$.
Les limites du taux d'accroissement en 0 à gauche et à droite ne sont pas les mêmes.
Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
Mais elle est dérivable à gauche et à droite : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

d. Interprétation géométrique

Propriété.

Lorsque f est dérivable en a, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

En effet, par définition, le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$, et elle passe par le point $(a, f(a))$.
Donc l'équation réduite est $y = f'(a)x + b$ avec b tel que $f(a) = f'(a)a + b$, autrement dit, $b = f(a) - af'(a)$.
On peut donc écrire $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Autour de a, la tangente est une bonne approximation de la courbe, plus précisément, on peut montrer que l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f'(a)(x-a) + f(a)$ est négligeable devant $x - a$: $\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)}$.
Cette formulation est appelée ***développement limité à l'ordre 1 de f en a***.

On peut aussi l'écrire ainsi : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(a) + (x-a)f'(a)$.

Preuve : montrons que $f(x) - \Big(f(a) + (x-a)f'(a)\Big)$ est négligeable devant $(x-a)$ au voisinage de a.

$\frac{f(x) - \Big(f(a)+(x-a)f'(a)\Big)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$.
Or $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - \Big(f(a) + (x-a)f'(a)\Big)}{x-a} = 0$.
Autrement dit $f(x) - (f(a) + (x-a)f'(a)) \underset{x \to a}{=} o(x-a)$ soit $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$.

Conséquence : $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable en } a\text{, alors } f \text{ est continue en } a}$.

e. Utilisation du taux d'accroissement pour des calculs de limite

Exemples :

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$? (*on connaît cette limite grâce aux équivalents, mais la preuve des équivalents est la suivante :*)

  $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0}$: on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0.
  Donc la limite est la valeur de la dérivée de la fonction exponentielle en 0, c'est-à-dire e^0 soit 1.
  En bref : $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = \exp'(0) = e^0 = 1$.
- de même, on montre $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$.

2) Dérivabilité sur un intervalle

Définition.

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout point a de I.
Dans ce cas, on appelle ***fonction dérivée*** la fonction notée f', définie sur I qui à un nombre de I associe le nombre dérivé de f à cet endroit :

$f' :\ I \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f'(x)$: nombre dérivé de f en x, coefficient directeur de la tangente en x

3) Dérivabilité des fonctions de référence et opérations sur les dérivées

a. fonctions de référence

Théorème.

Les fonctions de référence sont toutes dérivables sur leur ensemble de définition SAUF :
- les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ et non entier (par exemple les racines n-ièmes avec $n \geqslant 2$) ne sont pas dérivables en 0 ;
- les fonctions Arcsin et Arccos ne sont pas dérivables en -1 ni en 1 ;
- la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0
- la fonction partie entière n'est pas dérivable en k quel que soit le k de $\mathbb{Z}$.

Pour les expressions des fonctions dérivées des fonctions usuelles, on se reportera au tableau du chapitre Pratiques calculatoires - 2 Dérivées et variations..

b. opérations et dérivation

Somme, produit, quotient, composée de deux fonctions dérivables sont dérivables partout où elles sont définies. Plus précisément :

Théorème.

- Si f et g sont dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $f \times g$, λf sont dérivables sur I et

  $(f+g)' = f' + g' \quad ; \quad \boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'} \quad ; \quad (\lambda f)' = \lambda f'$

  $\dfrac{f}{g}$ est dérivable partout où g ne s'annule pas, et $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}}$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

  $\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = g' \circ f(x) \times f'(x)$.

Théorème.

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.
Si de plus, f est dérivable en a de I, alors : f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

Dans ce cas, $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

(si f^{-1} est dérivable en x, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$)

II. Propriétés des fonctions dérivables

1) Variations, extrema

Théorème.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$ (les tangentes sont horizontales).
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ (les tangentes montent).
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$ (les tangentes descendent).

Remarque très importante : f est strictement croissante lorsque $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et que f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert de I (elle peut s'annuler en des « points isolés », ou un « nombre fini de points » sans que cela ne l'empêche d'être strictement monotone)
Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante bien que sa dérivée s'annule en 0.

Attention : il est important que I soit un intervalle :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$

Théorème.

f est définie sur I et soit $a \in I$ qui n'est pas un bord.

Si $\begin{cases} f \text{ a un extremum local en } a \\ f \text{ est dérivable en } a \end{cases}$ alors $f'(a) = 0$.

Attention : la réciproque est fausse, la fonction cube en 0 est un exemple.
Pour que a soit un extremum de f, il faut que f' s'annule et change de signe en a (et cela suffit).

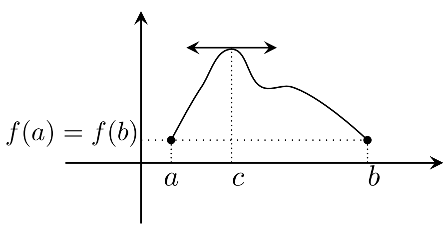
Exemple : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$:
f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.
On remarque que $f'(x) = 3(x-1)^2$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante (*la dérivée ne s'annule qu'en un point*).

2) Théorème de Rolle (Michel Rolle, 1652 - 1719)

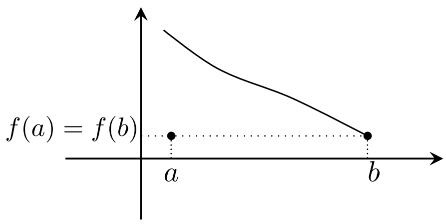
Théorème de Rolle.

Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } f(a) = f(b) \end{cases}$, alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Illustration :



la continuité en a et en b est indispensable



Interprétation cinématique : un mobile sur un axe qui revient à son point de départ, a une vitesse nulle à un moment.
(théorème de Rolle appliqué à la fonction f où $f(t)$ donne la position du mobile au cours du temps : $f(t_0) = f(t_{fin})$)

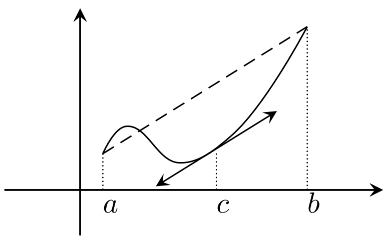
3) Accroissements finis

Théorème des accroissements finis.

Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\end{cases}$, alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Interprétation cinématique : un mobile en déplacement le long d'un axe entre les temps t_0 et t_{fin} a à un moment sa vitesse moyenne sur $[t_0, t_{fin}]$.

Démonstration du théorème :



on remarque $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \Longleftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$
où $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *correspond à la pente de la corde entre* a *et* b
on dirait que la tangente est parallèle à la courbe à un endroit où la courbe est le plus loin de la corde
une équation de la corde est $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

On pose $\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$.
$\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 0$, et φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Donc par le théorème de Rolle, il existe c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Or $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ donc c vérifie $0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Autrement dit $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. □

Conséquence :
Propriété : inégalité des accroissements finis.

- Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } \forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M \end{cases}$ alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.
- Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } \forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant k \end{cases}$ alors $\forall (x_1,x_2) \in [a,b]^2$, $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant k|x_1-x_2|$.

Justification du premier • : le théorème des accroissements finis s'applique à f sur $[a,b]$.
Donc il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
Or par hypothèse, $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et $b-a > 0$ donc $m(b-a) \leqslant f'(c)(b-a) \leqslant M(b-a)$, autrement dit $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$. □

Application dans les études de suites récurrentes (notamment Exercice 8).

4) Limite de la dérivée

Théorème de la limite de la dérivée.

Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur un intervalle } I \\ \text{dérivable sur } I\backslash\{a\} \\ \text{telle que } \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
En particulier si ℓ est un nombre fini, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Exemple : soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

⋆ continuité sur $[0,+\infty[$: f est continue sur $]0,+\infty[$ (produit de deux fonctions usuelles continues)
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ (th croissances comparées)
Et $f(0) = 0$ donc f est aussi continue en 0.
⋆ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (produit de deux fonctions usuelles dérivables)
⋆ $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 2x\ln(x) + \frac{x^2}{x} = 2x\ln(x)+x$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ (th des croissances comparées et somme).

Donc on peut appliquer le théorème de la limite de la dérivée : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

III. Dérivées d'ordres supérieurs

1) Fonctions $\mathcal{C}^k$

Si f est dérivable sur I, alors on peut s'interroger sur la dérivabilité de f' : si f' est dérivable, sa dérivée est notée f'' ou $f^{(2)}$: c'est la dérivée seconde de f.

Définition.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle ***dérivée n-ième de f*** la fonction notée $f^{(n)}$ et définie par récurrence :
$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall k \leqslant n,\ f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)' \end{cases}$$
- Si f est k fois dérivable sur I que sa dérivée k-ième est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Théorème.

Toutes les fonctions de référence sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

Remarque : le théorème de la limite de la dérivée s'adapte si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I\backslash\{a\}$ et que les deux autres hypothèses sont satisfaites, alors f sera $\mathcal{C}^1$ sur I.

2) Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur et formule de Leibniz

Somme, produit, quotient, composée de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ sont $\mathcal{C}^k$ partout où elles sont définies. Plus précisément :

Théorème : somme, produit, quotient.

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et f et g dans $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
- $f+g$, $f \times g$, λf sont dans $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ et
$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)} \quad ; \quad (\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$
$$(f \times g)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$
- si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont $\mathcal{C}^k$ sur I.

Conséquence : les ensembles $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (car ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles définies sur I).

Théorème : composition.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I,J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

Théorème : réciproque.

$$\text{Si } f \text{ est } \begin{cases} \text{de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \ (k \in \mathbb{N}^* \text{ ou } \infty) \\ \text{une bijection de } I \text{ sur } J \\ \text{telle que } \forall x \in I, f'(x) \neq 0 \end{cases} \qquad \text{alors } f^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } J.$$

Remarque : la fonction arccosinus est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ car :
⋆ cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$
⋆ cos est bijective de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$
⋆ $\forall x \in]0,\pi[, \cos'(x) \neq 0$ (car $\cos' = \sin$)