Matrices.

Exercice 16.

Partie A

1. $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On va montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $J^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$.

Initialisation : pour $k = 1$, $J^1 = J$ et $2^{k-1} = 2^0 = 1$ donc la formule est vraie.

Hérédité : Soit p un entier fixé quelconque mais supérieur ou égal à 1.

On suppose que la formule est vraie au rang p, c'est-à-dire $J^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$.

On va montrer qu'elle est vraie au rang $p+1$, c'est-à-dire $J^{p+1} = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 2^p \\ 2^p & 0 & 2^p \\ 2^p & 0 & 2^p \end{pmatrix}$.

On sait que $J^{p+1} = J \times J^p$, donc par hypothèse de récurrence, $J^{p+1} = J \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{p-1}+2^{p-1} & 0 & 2^{p-1}+2^{p-1} \\ 2^{p-1}+2^{p-1} & 0 & 2^{p-1}+2^{p-1} \\ 2^{p-1}+2^{p-1} & 0 & 2^{p-1}+2^{p-1} \end{pmatrix}$$

Or $2^{p-1} + 2^{p-1} = 2 \times 2^{p-1} = 2^p$.

Donc $J^{p+1} = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 2^p \\ 2^p & 0 & 2^p \\ 2^p & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 1,\ J^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}}$.

2. En posant $\underline{a = 2 \text{ et } b = 1}$, on a $aI + bJ = 2I + J = A$. Ainsi, $\boxed{A = 2I + J}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définir la formule $\mathcal{P}(n)$: $A^n = 2^n I + \left(\dfrac{4^n - 2^n}{2}\right) J$.

Initialisation : pour $n = 1$, $A^1 = A$, et $2^1 = 2$, et $\frac{4^1-2^1}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$,
donc $2^1 I + \left(\frac{4^1-2^1}{2}\right) J = 2I + J = A$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel $\geqslant 1$ quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $A^k = 2^k I + \left(\dfrac{4^k - 2^k}{2}\right) J$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$A^{k+1} = A \times A^k = (2I + J) \times \left(2^k I + \left(\dfrac{4^k - 2^k}{2}\right) J\right)$ (par hypothèse de récurrence et **2.**)

$$= 2 \times 2^k I^2 + 2\left(\frac{4^k - 2^k}{2}\right) IJ + 2^k JI + \left(\frac{4^k - 2^k}{2}\right) J^2$$
$$= 2^{k+1} I + (4^k - 2^k) J + 2^k J + (4^k - 2^k) J \text{ (car } J^2 = 2J)$$
$$= 2^{k+1} I + (2 \times 4^k - 2^k) J$$

$$= 2^{k+1}I + \left(\frac{4\times 4^k - 2\times 2^k}{2}\right)J$$
$$= 2^{k+1}I + \left(\frac{4^{k+1} - 2^{k+1}}{2}\right)J \qquad \text{CQFD}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ A^n = 2^nI + \left(\frac{4^n - 2^n}{2}\right)J}$.

4. Comme $2^n + \frac{4^n-2^n}{2} = 2\times\frac{2^n}{2} + \frac{4^n-2^n}{2} = \frac{4^n+2^n}{2}$, on a $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 2^n & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n+2^n}{2} \end{pmatrix}}$.

Partie B

1. $A^0 = I$, et $2^0I + \left(\frac{4^0-2^0}{2}\right)J = 1I + \left(\frac{1-1}{2}\right)J = I$ donc <u>la formule est vraie pour $n=0$</u>.

2. Avec la méthode du pivot de Gauss, on a A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}}$.

3. Pour $n=-1$, $2^nI + \left(\frac{4^n-2^n}{2}\right)J = 2^{-1}I + \left(\frac{4^{-1}-2^{-1}}{2}\right)J = \frac{1}{2}I - \frac{1}{8}J$.

Or $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, donc $\frac{1}{2}I - \frac{1}{8}J = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Donc $\boxed{\text{la formule est vraie pour } n=-1}$.