Matrices.

Exercice 1.

Dans chaque cas, écrire la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leq n,\ 1\leqslant j\leq p}$ telle que

1. $n = 2,\ p = 3$ et $a_{i,j} = i + j$

2. $n = 4,\ p = 3$ et $a_{i,j} = \min(i, j)$

3. $n = 3,\ p = 3$ et $a_{i,j} = \cos(\frac{i\pi}{3})\sin(\frac{j\pi}{3})$

4. $n = 4,\ p = 4$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 2.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lorsque c'est possible, calculer les matrices suivantes :

$$C + E, \quad AB, \quad BA, \quad 2D - 3F, \quad DF, \quad BD, \quad AB + DF, \quad EF - 2A, \quad AB + AE$$

Exercice 3.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer toutes les sommes et tous les produits que l'on peut faire avec deux de ces matrices. Penser au fait que le produit n'est pas commutatif!

Exercice 4.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 5.

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n - 3v_n.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer u_1, v_1, puis u_2, v_2.

2. Donner X_0, X_1 et X_2.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$.

Exercice 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$.

1. Calculer B^2.

2. Déterminer A^n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = I + J$, puis calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 8.

Soient $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = 2I + B$.

2. Calculer B^2.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n I + v_n B$.
On vérifiera que $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

Exercice 9.

1. A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $AB \neq 0$ et $BA = 0$.

(a) Montrer que ni A ni B ne sont inversibles.

(b) Calculer $(AB)^2$.

Exercice 10.

La matrice A est définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^3 = 3A^2 - 2A$.
Que peut-on en déduire quant à l'inversibilité de A ?

Exercice 12.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

*** 2.** Déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$ une expression de A^n.

Exercice 13.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

Soit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et X et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ notées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement le système $AX = B$ et le résoudre.

2. En déduire que A est inversible et déterminer l'inverse de A.

Exercice 15.

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

3. Donner D^n pour tout entier naturel n.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

5. Donner la matrice M^n sous forme d'un tableau de nombres.

Exercice 16.

Partie A

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2, J^3, et en déduire par récurrence J^k pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

3. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité $A^n = 2^n I + \left(\dfrac{4^n - 2^n}{2}\right) J$.

4. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A^n sous forme d'un tableau de nombres.

Partie B

1. La formule obtenue à la question **A.3.** est-elle encore valable pour $n = 0$? (on rappelle que $A^0 = I$)

2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

3. La formule obtenue à la question **A.3.** est-elle encore valable pour $n = -1$? (justifier)

Exercice 17.

Voici une application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - 7y, 2x + 2y) \end{array}$.

1. On définit $u = (0, 1)$, $v = (-3, 2)$.
Calculer $f(u), f(v)$, en déduire $f(u) + f(v)$ et $3f(u)$.
Calculer $u + v$ et $3u$ et en déduire $f(u + v)$ et $f(3u)$.

2. Donner la matrice de l'application linéaire f que l'on notera A.

3. f est-elle bijective ? En déduire le noyau et l'image de A.

Exercice 18.

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-2x - 2y + 2z\ ,\ 3x + 7y - 7z\ ,\ x + 5y - 5z) \end{array}$

1. Déterminer la matrice A canoniquement associée à f (on admet le fait que f soit linéaire).

2. Déterminer le noyau et l'image de A.

Exercice 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 4 & 5 & 6 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$.

1. Écrire l'application linéaire f canoniquement associée à A.

2. Déterminer le noyau et l'image de A.

* Exercice 20.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et A la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $a_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$. Calculer $A\bar{A}$ et en déduire A^{-1}.