Matrices

Le mot « matrice » provient du latin *matrix*, lui même dérivé de *mater*, la mère. Ce terme est employé dans de nombreux domaines, pour désigner un élément fondateur, une structure à partir de laquelle on construit.
En mathématiques, les matrices sont sous forme de tableau de nombres, et elles caractérisent un système linéaire. Elles ont des applications en probabilités, pour l'étude de suites ... c'est alors une matrice qui définit la transition entre les termes successifs des suites, et permet donc leur construction.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$: c'est l'ensemble des coefficients ou ***scalaires*** avec lesquels nous travaillerons.

I. Généralités sur les matrices

1) Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice est un tableau de nombres de $\mathbb{K}$ de taille prédéfinie.

Par exemple, on définit la matrice A par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1,3 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
C'est une matrice « 2 lignes 3 colonnes » ou « de taille 2×3 », à coefficients dans $\mathbb{R}$.
L'élément ou ***coefficient*** de la 2ième ligne et première colonne est -4, et on peut noter $a_{2,1} = -4$.

Voici une matrice « 3 lignes 2 colonnes » à coefficients dans $\mathbb{C}$:

Définition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une matrice A de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ est le coefficient de la matrice A situé à la ligne i et à la colonne j.
On peut noter $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Matrices particulières :

- La ***matrice nulle***, dont tous les coefficients sont 0 : on peut la noter $0_{n,p}$ lorsqu'elle est formée de n lignes et p colonnes, ainsi $0_{2,3} =$
- Les ***matrices colonnes*** sont des matrices $n \times 1$: $\begin{pmatrix} \vdots \\ \\ \vdots \end{pmatrix}$, par exemple
- De même, les ***matrices lignes*** sont des matrices $1 \times p$: $\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, par exemple
- Les ***matrices carrées*** ont autant de lignes que de colonnes (c'est-à-dire $n = p$). On peut noter leur ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
  Parmi les matrices carrées, on trouve :
  — des matrices ***triangulaires supérieures*** : ce sont des matrices qui n'ont que des 0 en bas et à gauche, et sont donc intéressantes sur la diagonale et en haut à droite : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$, par exemple
  — des matrices ***triangulaires inférieures*** : matrices qui n'ont des nombres éventuellement non nuls que sur la diagonale et en bas à gauche : $\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, par exemple
  $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire inférieure si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \dots$

— des matrices ***diagonales*** : des 0 partout, sauf éventuellement sur la diagonale $\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

par exemple

$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonale si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \dots$

La ***matrice identité*** est une matrice diagonale particulière qui a des 1 sur la diagonale :

on la note I_n où n précise la taille de la matrice, par exemple $I_3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

II. Opérations sur les matrices

Dans toute cette partie, on utilisera les notations habituelles pour les coefficients :
$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$,

1) Addition et soustraction de deux matrices

On peut ajouter (ou soustraire) deux matrices de même taille : on ajoute (ou soustrait) terme à terme.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+3i \\ -4 & -2i & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Alors $A + B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $A - B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Définition.

Soient A et B deux matrices de même taille n lignes et p colonnes.
La ***matrice somme*** $A + B$ a aussi n lignes et p colonnes et est définie par
$\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}}$.

2) Multiplication par un nombre

On peut multiplier une matrice par un nombre : il suffit de multiplier tous les coefficients de la matrice par ce nombre : toujours avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+3i \\ -4 & -2i & 5 \end{pmatrix}$, on a $3A = \Big($

Ainsi, $\boxed{\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}}$.

Remarque : $1A = A$, $0A = 0_{n,p}$, $-1A$ se note $-A$.

3) Produit de deux matrices

Pour pouvoir faire le produit AB il faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B. La matrice résultat aura le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.
« « $(n,p).(p,m) \to (n,m)$ » »

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On va calculer le produit AB. Pour cela on utilise la disposition pratique suivante :

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1\times 7 + 4\times 1 & -1\times(-3) + 4\times 4 & \dots\dots & \dots\dots \\ 2\times 7 + 0\times 1 & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} -3 & 19 & -4 & 1 \\ 14 & -6 & 0 & -2 \\ 19 & -17 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Définition.

Soient A une matrice n lignes et p colonnes et B une matrice p lignes et q colonnes.
La ***matrice produit*** $M = A \times B$ (notée aussi AB) a n lignes et q colonnes, et ses coefficients sont définis par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $\boxed{m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$.

Produits par blocs : Si on note B_1, B_2, $\dots B_q$ les colonnes de B de sorte que $B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & B_2 & \dots & B_q \end{array} \right)$, alors $AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_q \end{array} \right)$ où AB_1, AB_2 $\dots AB_q$ sont les produits de A avec les colonnes de B et sont donc des matrices colonnes.

Sur le même principe, en notant A_1, A_2 et A_n les lignes de A : $\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \dots \\ \hline A_n \end{array} \right)$ alors $AB = \left(\begin{array}{c} A_1 B \\ \hline A_2 B \\ \hline \dots \\ \hline A_n B \end{array} \right)$

Attention : en général $\boxed{A \times B \neq B \times A}$ même si les tailles rendent les deux opérations faisables !!

Cas particulier des matrices diagonales :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $AB = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Pour faire le produit de deux matrices diagonales, il suffit de faire le produit des coefficients diagonaux.

4) Règles de calcul

Propriété.

On a les règles de calcul suivantes (on suppose les tailles compatibles).

- Avec $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, on peut donc noter sans ambiguïté λAB.
- La somme est commutative et associative : ....
- Le produit est associatif : $(AB)C = A(BC)$, on peut donc noter ABC.
- Le produit est distributif par rapport à la somme, à gauche et à droite :
  $C(A+B) = CA + CB$ et $(A+B)C = AC + BC$.
- 0_n est neutre pour l'addition : $0_n + A = A$;
  I est neutre pour la multiplication : $IA = AI = A$.

On peut donc factoriser, développer ... comme avec des nombres mais avec quelques précautions en plus (produit non commutatif, matrice identité qui remplace le 1).

Par exemple : avec des nombres $x^2 - x = x(x-1)$, dans le cas de matrices, c'est I qui joue le rôle du 1 : $\boxed{A^2 - A = A(A-I)}$, et $\boxed{A^2 + 3A = A(A+3I)}$.

III. Les matrices carrées

1) Puissances

Pour des raisons de dimensions, il n'est possible de calculer $A \times A$ que lorsque A est une matrice carrée, et on peut alors calculer $A \times A \times A$ ...
Dans ce cas, la même notation que pour les nombres est utilisée pour les matrices : $\boxed{A^3 = A \times A \times A}$ ...
En particulier $\boxed{A^0 = I}$ et $\boxed{A^1 = A}$.
Les mêmes règles s'appliquent alors, par exemple $A^3 \times A^2 = \ldots\ldots$

Attention : en général, $(AB)^n \neq A^n B^n$.

a. cas des matrices diagonales

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice diagonale est obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.
Par exemple avec $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n =$

b. utilisation de la formule du binôme de Newton

Rappel : la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances d'une somme :

$$\boxed{(a+b)^n = a^0 b^n + n a^1 b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 b^{n-3} + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + n a^{n-1} b^1 + a^n b^0}$$

Pour des matrices, on peut appliquer cette formule à deux matrices <u>A et B qui commutent c'est-à-dire $AB = BA$</u>, en général on l'applique à une matrice A et une autre de la forme xI.

Exemple avec A et $\frac{1}{2}I$, pour $n = 4$:
$A(\frac{1}{2}I) = A.\frac{1}{2}I = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{2}A$ et $(\frac{1}{2}I)A = \frac{1}{2}IA = \frac{1}{2}A$, donc on peut appliquer la formule :

$$\begin{aligned}(A + \tfrac{1}{2}I)^4 &= A^0(\tfrac{1}{2}I)^4 + 4A^1(\tfrac{1}{2}I)^3 + \tfrac{4(4-1)}{2}A^2(\tfrac{1}{2}I)^2 + 4A^3(\tfrac{1}{2}I)^1 + A^4(\tfrac{1}{2}I)^0 \\
&= I(\tfrac{1}{2}I)^4 + 4A(\tfrac{1}{2}I)^3 + 6A^2(\tfrac{1}{2}I)^2 + 4A^3\tfrac{1}{2}I + A^4 I \quad \text{car} \\
&= (\tfrac{1}{2})^4 I^4 + 4A(\tfrac{1}{2})^3 I^3 + 6A^2(\tfrac{1}{2})^2 I^2 + 4\tfrac{1}{2}A^3 I + A^4 \quad \text{car} \\
&= \tfrac{1}{2^4}I + 4\tfrac{1}{2^3}AI + 6\tfrac{1}{2^2}A^2 I + 2A^3 + A^4 \quad \text{car} \\
&= \tfrac{1}{16}I + \tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}A^2 + 2A^3 + A^4\end{aligned}$$

Application : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on cherche une expression de M^n.

1. On pose $B = M - 2I$. Calculer B, B^2, B^3. Que penser de B^k pour $k \geqslant 3$?
2. En déduire le calcul de M^n pour $n \geqslant 2$.

2) Inverses

Définitions.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est ***inversible*** si il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.
En cas d'existence, cette matrice B est appelée ***l'inverse*** de A et est notée A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles de taille n est appelé ***groupe linéaire*** et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque : si A est inversible, $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$.

Attention : toutes les matrices n'ont pas d'inverse, on ne peut donc pas écrire ni utiliser A^{-1} avant d'avoir vérifié que cet inverse existait.

Propriété.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Les propositions suivantes sont équivalentes :
  - (i) $AB = I_n$ (autrement dit A est inversible à droite)
  - (ii) $BA = I_n$ (autrement dit A est inversible à gauche)
  - (iii) A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration du dernier point : ....

....

Propriété.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si pour tout B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ a une unique solution.
Dans ce cas, la solution est $X = A^{-1}B$.

Remarque :

Résoudre l'équation $AX = B$ revient à trouver $x_1, x_2 \dots x_n$ tels que $\left\{\begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2+ & \dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2+ & \dots & +a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$

Autrement dit, une matrice carrée A de taille n est inversible si et seulement si le nombre de pivots du système est égal à n.
En particulier pour les matrices diagonales, l'inversibilité est justifiée par le fait que les éléments diagonaux sont tous non nuls.

Méthodes pour justifier l'existence d'un inverse et le déterminer :

⋆ Si on dispose d'une relation nous permettant de trouver une matrice B telle que $AB = I$, alors A est inversible et son inverse est B.

⋆ Sinon, on note $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne quelconque et on applique à la matrice augmentée $(A|B)$ les opérations élémentaires du pivot de Gauss pour transformer A en une matrice échelonnée réduite :

- si la matrice échelonnée réduite est I, alors A est inversible et l'inverse se lit dans la colonne de droite avec les coefficients des b_1, $b_2 \dots b_n$;
- sinon, la matrice A n'est pas inversible.

Exemples :

- La matrice A est définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV. Applications linéaires $X \mapsto AX$

Propriété.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On associe à A une application $\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$
Cette application φ_A est linéaire, ce qui signifie qu'elle vérifie :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall(X,Y) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})^2, \quad \varphi_A(\lambda X + \mu Y) = \lambda\varphi_A(X) + \mu\varphi_A(Y).$$

La matrice A caractérise entièrement cette application.

L'application est linéaire car : $\varphi_A(\lambda X + \mu Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$

Exemple avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:
L'application correspondante est : $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{\ldots,\ldots}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{\ldots,\ldots}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} & \mapsto & \end{array}$

1) Complément sur les applications linéaires

On peut assimiler (de façon bijective) les matrices colonnes à des uplets de même taille :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ peut être assimilée à $(1, 3, -2)$, ainsi $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ est assimilé à $\mathbb{K}^3$.

Ainsi, on peut dire que l'application $X \mapsto AX$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, c'est l'application linéaire ***canoniquement associée*** à A.
Réciproquement, à toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$ correspond une unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est la ***matrice canoniquement associée*** à l'application linéaire.

Exemples :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  Pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, noté $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AX =$

  Ainsi, l'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \ldots \end{array}$.

- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-2y+z, y+5z) \end{array}$
  On admet que f est linéaire.
  La matrice A qui lui est canoniquement associée vérifie

  Donc $A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

2) Image et noyau

Définition.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle ***noyau*** de A l'ensemble des antécédents de 0_n par $X \mapsto AX$.
Le noyau est une partie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et est noté $\mathrm{Ker}(A)$: $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \,|\, AX = 0_n\}$.

Exemple : déterminer le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle ***image*** de A l'ensemble des images de l'application $X \mapsto AX$.
L'image est une partie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et est noté $\mathrm{Im}(A)$: $\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.

Remarque : on note A_1, A_2 … A_p les colonnes de A.
Alors l'image de A est $\{x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_pA_p \mid (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p\}$.
C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A que l'on avait déjà noté $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$, et que l'on peut appeler ***vectoriel engendré*** par A_1, A_2,… A_p.

Exemple : déterminer l'image de $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.