

LOIS USUELLES.

Exercice 1.

Voici le tableau incomplet de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{27}{125}$			$\frac{8}{125}$

On sait que X suit une loi binomiale, compléter le tableau.

Exercice 2.

Une usine contient 2 machines : la machine A , qui fabrique 80% des pièces, et la machine B qui fabrique les 20% restant. À la sortie de l'usine, on contrôle l'état des pièces fabriquées.

On sait que :
 – la machine A produit 10% de pièces défectueuses ;
 – la machine B produit 5% de pièces défectueuses ;
 – les défauts des pièces sont produits aléatoirement et indépendamment des autres pièces.

Lorsque l'on considère une pièce, on appelle D l'événement « la pièce est défectueuse », A « la pièce a été fabriquée par la machine A » et B « la pièce a été fabriquée par la machine B ».

- Justifier que $\mathbf{P}(D) = \frac{9}{100}$.
- On a trouvé une pièce défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit issue de la machine A ?
- On prélève maintenant 200 pièces du stock en sortie de l'usine. On appelle X la variable aléatoire du nombre de pièces défectueuses sur ce lot de 200. On suppose le stock assez grand pour que le prélèvement des 200 pièces puisse être assimilé à une succession de 200 tirages avec remise.
 - Reconnaître la loi de X (justification correcte exigée bien sûr !). On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $\mathbf{P}(X = k)$.
 - Donner l'espérance et la variance de X .
 - Lorsque l'entreprise vend les pièces, elle est payée 5 euros par pièce correcte, mais doit rendre 1 euro par pièce qui s'est avérée défectueuse. On note R la recette de l'entreprise sur le lot de 200 pièces. Exprimer R en fonction de X , puis déterminer la recette moyenne d'un lot.

Exercice 3.

On note $x \in]0, 1[$ la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne. On suppose que les pannes des différents moteurs sont indépendantes les unes des autres.

- On note X_3 la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un avion trimoteur, et X_4 le nombre de moteurs en panne sur un quadrimoteurs.
 - Quelles sont les lois de X_3 et X_4 ?
 - Déterminer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs d'un avion soient en panne, dans chacun des cas.
- On considère qu'un trimoteur peut encore voler si son moteur de queue ou les deux moteurs des ailes fonctionnent encore, et on note T cet événement : démontrer que $\mathbf{P}(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$.
- Un quadrimoteur peut encore voler si au moins un moteur sous chaque aile fonctionne encore. Déterminer la probabilité de l'événement Q : « un quadrimoteur peut encore voler ».
- Quel avion est le plus sûr ?

Exercice 4.

À la fin d'un jeu, le gagnant doit lancer un dé pour connaître le montant de ses gains. Il gagne en euros 10 fois le numéro de la face du dé.

On note N le numéro du dé, et G le gain du joueur.

Déterminer les lois de N et de G .

Déterminer le gain moyen que peut espérer le gagnant.

Exercice 5. (Elouan)

Un journaliste s'interroge sur le nombre de personnes sensibles au réchauffement climatique.

Il interroge 70 passants, et 40 disent s'inquiéter par rapport au réchauffement climatique, et 30 disent n'avoir pas d'avis. Les passants interrogés ne se connaissent pas et ne s'influencent donc pas les uns les autres.

En supposant cette proportion valable dans toute la population, on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si une personne interrogée est sensible au réchauffement climatique, et 0 sinon.

Quelle est la loi de X ?

Exercice 6.

Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe, et à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de manière équiprobable.

Par exemple, à la fin de la première étape, il peut se trouver à l'abscisse 1 ou à l'abscisse -1 , avec une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque possibilité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse occupée par le robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position originale à la fin de l'expérience.

1. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 2$.

(a) Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?

(b) Soit Y_2 le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en deux déplacements. Quelle est la loi de Y_2 ?

(c) Calculer la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après deux étapes.

2. Quelle est la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après trois étapes ?

3. Cas général.

(a) Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en n déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?

(b) Exprimer X_n en fonction de Y_n .

(c) Quelle est la probabilité que le robot soit revenu en position initiale après n étapes ?

Exercice 7.

Pour chacune des réponses suivantes, inventer un énoncé complet qui pourrait correspondre.

Réponse 1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{4}{7}\right)$.

Réponse 2. $E(W) = \frac{10+1}{2} = 5,5$.

Réponse 3. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(82; \frac{1}{5}\right)$, $Y(\Omega) = \llbracket 0, 82 \rrbracket$ et $\forall k \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(Y = k) = \binom{82}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{82-k}$

Exercice 8.

On lance cent fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de fois où on obtient Face.

1. Reconnaître la loi de X , et préciser $X(\Omega)$, et $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3. Majorer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité d'avoir plus de 60 fois face ou moins de 40 fois face à l'issue de ces lancers.

Exercice 9.

On lance n fois un dé équilibré, et on note X_n la variable aléatoire du nombre de fois où l'on obtient un 6 au cours des n lancers.

1. Quelle est la loi de X ? donner son espérance et sa variance.

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$, déterminer un nombre minimum de lancers pour être sûr à 95% d'obtenir une proportion de 6 comprise entre $\frac{1}{6} - 0,1$ et $\frac{1}{6} + 0,1$.