Lois usuelles

Dans ce chapitre, nous allons étudier des lois issues de situations qui reviennent souvent, de sorte que lorsque l'on reconnaîtra de telles situations, plus besoin de recalculer les probabilités, l'espérance, la variance...

I. Loi certaine

Cette loi provient de la situation où il n'y a qu'une seule valeur possible pour la variable aléatoire : $X(\Omega) = \{a\}$, la probabilité de cette valeur est donc 1.

La variable aléatoire X suit la loi certaine de paramètre a lorsque $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

Alors $\boxed{E(X) = a}$ et $\boxed{V(X) = 0}$.

II. Loi uniforme

1) situation-type

Une boîte contient 7 boules numérotées de 1 à 7 indiscernables au toucher.
On tire une boule au hasard dans la boîte.
La variable aléatoire X donne le numéro de la boule tirée.

2) loi

Dans la situations décrite ci-dessus, on a autant de chances de tirer chaque boule, on dit alors que la loi de probabilité de X est la ***loi uniforme***.
Cette loi est donnée par $X(\Omega) = [\![1, 7]\!]$ et $\forall k \in [\![1, 7]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{7}$
La loi uniforme correspond à une situation d'***équiprobabilité*** de chacune des valeurs prises par X.

Définition.
Une variable aléatoire X ***suit la loi uniforme sur*** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si :
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbf{P}(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1; n]\!]\right)$ signifie « X suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$ ».

3) espérance et variance

Propriété.
⋆ Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$, alors $E(X) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$.
⋆ Cas particulier : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$, alors : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Preuve de la formule de l'espérance du cas particulier :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

4) exemple d'utilisation

On lance un dé équilibré à 6 faces, X est le numéro obtenu.

1. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.

2. Un jeu consiste à payer 10 euros, puis lancer un dé : on gagne alors en euros, trois fois le résultat du dé. Ce jeu est-il équilibré ? (*on pourra noter G la variable aléatoire correspondant au gain à la fin du jeu*)

Réponses :

1. X suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
Et donc $E(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5$ et $V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$.

2. Au cours du jeu, on gagne $3X$ euros, et on en perd 10, donc le gain est $G = 3X - 10$.
Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 3E(X) - 10$ donc $E(G) = 10,5 - 10 = 0,5$.
L'espérance des gains n'est pas nulle, le jeu n'est pas équilibré (il est en faveur du joueur).

III. Loi de Bernoulli

1) épreuve de Bernoulli

Exemple : une boîte contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher, on pioche une boule au hasard dans la boîte, on gagne si la boule est noire, et on perd sinon.
Cette expérience a deux issues possibles :
− un succès : la boule tirée est noire ;
− un échec : la boule tirée est blanche.
Une telle expérience est une ***épreuve de Bernoulli***.

Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui comporte deux issues, un succès et un échec.

2) loi

Suite de l'exemple : on peut définir une variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule tirée est noire et 0 si la boule est blanche.
Alors la loi de X est donnée par $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{3}{10}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{7}{10}$.

Cette loi est appelée ***loi de Bernoulli de paramètre*** $0,7$.

Définition.
Soit X une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs 0 et 1.
On note $p = \mathbf{P}(X = 1)$, alors on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi, la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ signifie $\boxed{X(\Omega) = \{0; 1\},\ \mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p}$.
(on note parfois $q = 1 - p$)
L'événement $(X = 0)$ est appelé ***échec*** et $(X = 1)$ est le ***succès***.

3) espérance et variance

Propriété.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p) = pq$.

En effet, $E(X) = 0 \times \mathbf{P}(X = 0) + 1 \times \mathbf{P}(X = 1) = 0 + p = p$
Et $E(X^2) = 0^2 \times \mathbf{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbf{P}(X = 1) = p$.
Or par la formule de König : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

4) exemple d'utilisation

On lance une pièce équilibrée, on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la pièce donne pile, et 0 si c'est face. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Réponse : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

IV. Loi binomiale

1) schéma de Bernoulli

Exemple : une boîte contient 3 boules blanches et 7 boules noires.
On joue 30 parties du même jeu : piocher une boule au hasard dans la boîte.
On remet la boule piochée dans la boîte avant de procéder au tirage suivant (de sorte que les tirages sont indépendants les uns des autres).
Pour chaque partie, on gagne si l'on pioche une boule noire.
Une telle expérience est un ***schéma de Bernoulli***.

Un ***schéma de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui consiste en la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes les unes des autres.

2) loi binomiale

Suite de l'exemple : on peut définir la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires piochées au cours des 30 parties.
La loi de X est appelée ***loi binomiale de paramètres 30 et*** $0,7$, que l'on note $\mathcal{B}(30;0,7)$.
(Autrement dit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30;0,7)$.)

Définition.

Dans un schéma de Bernoulli, on peut définir une variable aléatoire X égale au nombre de succès.
Si le schéma comporte n répétitions et que la probabilité de succès à chaque épreuve est p, alors la loi de X est appelée ***loi binomiale de paramètres*** n ***et*** p, notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Autrement dit, X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque :

- on répète n fois la même épreuve,
- les épreuves sont indépendantes les unes des autres,
- chaque épreuve a 2 issues :
  - un succès de probabilité p
  - un échec de probabilité $1-p$

  épreuve de Bernoulli

  schéma de Bernoulli
- X est la variable aléatoire du nombre de succès à l'issue des n répétitions.

Théorème.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!], \text{ et pour tout } k \text{ de } [\![0;n]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Justification :

⋆ $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ car sur n épreuves, on peut avoir entre 0 et n succès.

⋆ pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k)$?

$(X=k)$ est l'événement : « au cours des n épreuves, on a k succès et $n-k$ échecs »

– Combien d'issues y a-t-il avec k succès et $n-k$ échecs ?
  Former une telle issue revient à déterminer k épreuves qui seront un succès parmi les n épreuves au total.
  Cela fait donc $\binom{n}{k}$ issues possibles avec k succès et $n-k$ échecs.

– Probabilité d'une issue avec k succès ?
  Les épreuves successives sont indépendantes, donc on peut faire le produit des probabilités à chaque épreuve : il y a k succès de probabilité p et $n-k$ échecs de probabilités $1-p$ donc on obtient $p^k(1-p)^{n-k}$.

Finalement, $\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

3) espérance et variance

Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, alors $E(X) = np$ et $\boxed{\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = npq}$.

4) exercice type résolu

Une boîte contient 10 boules indiscernables : 2 noires et 8 blanches. Un joueur tire 11 fois de suite, avec remise entre chaque tirage, une boule dans cette boîte. On appelle X la variable aléatoire du nombre de boules noires obtenues.

1. Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, et pour chaque entier k de $X(\Omega)$, une expression de $\mathbf{P}(X=k)$ en fonction de k.

2. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 4 fois une boule blanche ?

3. Il gagne 1 euro par boule noire et perd 2 euros par boule blanche, quel est le gain moyen espéré à l'issue des 11 tirages ?

Réponses :

1. Le joueur répète 11 fois de suite la même épreuve : tirer une boule.
Il remet la boule piochée dans la boîte avant de piocher la suivante, donc les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
Pour chaque épreuve, les issues sont :
– « piocher une boule noire », on l'appellera succès, elle a pour probabilité $p = \frac{2}{10}$ soit $p = \frac{1}{5}$;
– « piocher une boule blanche », c'est l'échec.
X compte le nombre de succès au cours des 11 répétitions.
Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(11, \frac{1}{5}\right)}$.
Et donc $\boxed{X(\Omega) = [\![0, 11]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, 11]\!], \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}}$.

2. « Obtenir 4 fois une boule blanche » revient à « obtenir 7 fois une boule noire »c'est-à-dire $(X = 7)$.
Donc $\mathbf{P}(\text{« obtenir 4 fois une boule blanche »}) = \mathbf{P}(X = 7) = \boxed{\binom{11}{7} \left(\frac{1}{5}\right)^7 \left(\frac{4}{5}\right)^4}$.

3. ⋆ les X succès rapportent k euros
⋆ il y a $(11 - X)$ échecs, qui font chacun perdre 2 euros, donc pertes totales : $2(11 - X)$.
Donc au final, en notant G le gain à l'issue des 11 tirages, $G = X - 2(11 - X) = 3X - 22$.
Alors, par linéarité de l'espérance, $E(G) = 3E(X) - 22$.
Or $E(X) = 11 \times \frac{1}{5}$ donc $E(G) = \frac{33}{5} - 22 = -\frac{77}{5}$.
Le gain moyen espéré à ce jeu est $-\frac{77}{5}$. (*éviter de jouer !!*)