Continuité.

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $I =]0;\pi[$ par $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$.

1. Justifier que f est continue sur I.

2. Déterminer la limite de f en 0.

3. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui définir son prolongement.

Exercice 2.

On pose $f(x) = \frac{x\sin(x)}{e^x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f, et justifier que f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

2. Étudier la limite de f en 0 et en déduire que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, préciser le prolongement.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe de f a-t-elle une asymptote ?

Exercice 3.

Soient $I =]0, 2\pi[$ et les fonctions f et g définies sur $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2(1-\cos(x))}}$ et $g(x) = f(\arccos(1-x))$.

1. Démontrer que f est bien définie et est continue sur I.

2. **(a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)$.

(b) Calculer, avec des équivalents, la limite de f en 0, et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

(c) La courbe de f a-t-elle une asymptote ? préciser.

3. **(a)** Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout x de $]0, 1[$.

(b) Déduire de ce qui précède que $\arccos(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2x}$.

Exercice 4.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. En déduire que f est constante.

Exercice 5.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Dresser le tableau des variations de la fonction g (avec limites et extrema).

2. Prouver que l'équation $g(x) = 1$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera α.
Justifier que $\alpha \in [3; 4]$.

3. Résoudre l'inéquation $g(x) < 1$ (*utiliser* α).

Exercice 6.

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
Construire le tableau des variations de f^{-1} sur J.

Exercice 7.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. Démontrer que f_n admet une unique racine réelle notée u_n.

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et en déduire que (u_n) converge.

3. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 8.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Étudier la parité de f et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

2. **(a)** Démontrer que f admet une bijection réciproque définie et continue sur un intervalle J à préciser.

(b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.