Continuité.

Une fonction est ***continue sur un intervalle*** si on peut tracer sa courbe sans lever le crayon. Autrement dit lorsque l'on se rapproche d'un point a, par la droite ou par la gauche, $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

I. Continuité

Définitions.

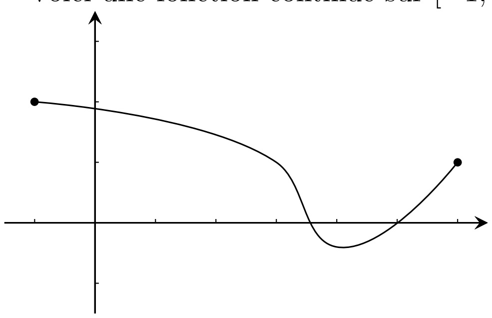
• Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
On rappelle que f est ***continue en*** a si elle admet une limite finie en a.
Cela revient à affirmer $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$.

• f est continue à gauche en a si $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.
f est continue à droite en a si $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.

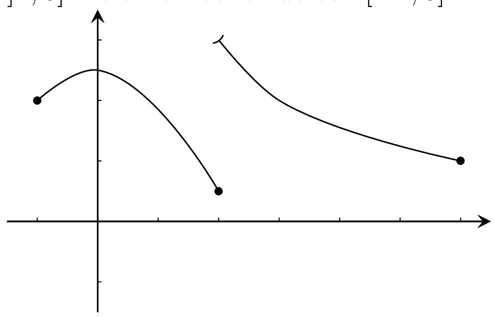
• f est dite ***continue sur un intervalle*** I si elle continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Exemples :

• Voici une fonction continue sur $[-1;6]$:



Voici une fonction continue sur $[-1;2]$ et sur $]2;6]$ mais non continue sur $[-1;6]$:



$f(2)=\frac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$

Cette fonction qui est continue sur $[-1;2]$ et sur $]2;6]$ mais non continue sur $[-1;6]$, est dite ***continue par morceaux*** sur $[-1;6]$.

• La fonction partie entière est continue sur chaque intervalle $[k,k+1[$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1) justifier la continuité d'une fonction

continuité des fonctions de référence et usuelles :

• les fonctions polynomiales, et puissances d'exposant entier positif sont continues sur $\mathbb{R}$.

• les fonctions trigonométriques sont continues sur $\mathbb{R}$
leurs réciproques sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

• la fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

• la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

• la fonction inverse, et les fonctions $x\mapsto \frac{1}{x^n}$ sont continues sur $]-\infty;0[$ et continues sur $]0;+\infty[$.

• une fraction rationnelle est continue sur <u>chacun des intervalles</u> de son ensemble de définition.

opérations sur les fonctions continues :

• la somme, la différence et le produit de fonctions continues sur un même intervalle sont continues sur ce même intervalle.

• le quotient de deux fonctions continues est continu sur <u>chacun des intervalles</u> où le dénominateur est non nul.

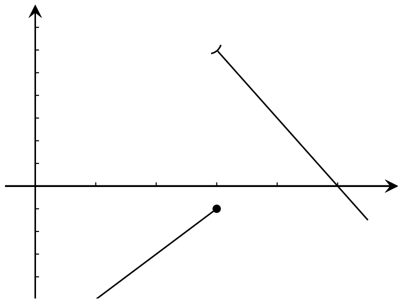
• si f est continue en a, et g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.
(≪ la composée de deux fonctions continues est continue. ≫)

Exemples :

- $f(x) = \dfrac{x}{3x-4}$
  f est une fraction rationnelle, son dénominateur s'annule en $\frac{3}{4}$ donc elle est continue sur $]-\infty, \frac{3}{4}[$ et continue sur $]\frac{3}{4}, +\infty[$.
- $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$
  g est un quotient :
  ⋆ le numérateur est défini et continu sur $\mathbb{R}^+$
  ⋆ le dénominateur est continu sur $\mathbb{R}$ mais s'annule en 3.
  Donc g est définie sur $[0, 3[\cup]3; +\infty[$ et est continue sur $[0, 3[$ et continue sur $]3, +\infty[$

Attention : la continuité n'a de sens que sur un intervalle, ainsi on ne dira pas (et n'écrira pas non plus) que g est continue sur $[0, 3[\cup]3; +\infty[$.

- $h(x) = \begin{cases} 2x-7 & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \\ -3x+15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
  ⋆ Sur $]-\infty, 3[$, et sur $]3; +\infty[$, h est affine donc elle est continue sur chacun de ces deux intervalles.
  ⋆ De plus, $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 2x-7 = 2\times 3-7 = -1$ et $h(3) = -1$ donc h est continue à gauche de 3.
  ⋆ Et $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} -3x+15 = 6 \neq h(3)$ donc h n'est pas continue à droite de 3.
  Ainsi, h est continue sur $]-\infty; 3]$ et continue sur $]3, +\infty[$.



Remarque : on peut affirmer que $\mathcal{C}(I)$ est un espace vectoriel : c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

En effet :
⋆ La fonction nulle est continue.
⋆ Soient f et g deux fonctions continues, et λ un réel.
λg est continue car g est continue.
Et puisque la somme de deux fonctions continues est continue, $f + \lambda g$ est continue.
Donc $\mathcal{C}(I)$ est stable par combinaison linéaire. □

2) prolongement par continuité

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ -1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ donc $|f(x)| \leqslant |x|$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Ainsi, il semblerait que « f n'ait pas de problème en 0 », autrement dit que l'on pourrait dire que $f(0) = 0$ sans vraiment modifier la fonction (*on peut tracer la courbe de f sur la calculatrice pour le constater*).
On dit que l'on peut prolonger la fonction f en 0 : la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue ; on l'appelle ***prolongement par continuité de f en a***.

Définition.

Soit f une fonction définie sur I et soit a une borne finie de I qui n'est pas dans I.
On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en a si f admet une limite finie en a.
On appelle alors ***prolongement par continuité de f en a*** la fonction suivante :

$$g : \begin{array}{rcl} I\cup\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ si } x = a \end{cases} \end{array}$$

II. Propriétés des fonctions continues

1) limite de l'image d'une suite

Propriété.

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue au point x_0 de I.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x_0.

Alors $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Application : soit(u_n) une suite récurrente avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.
On suppose que (u_n) converge vers ℓ.

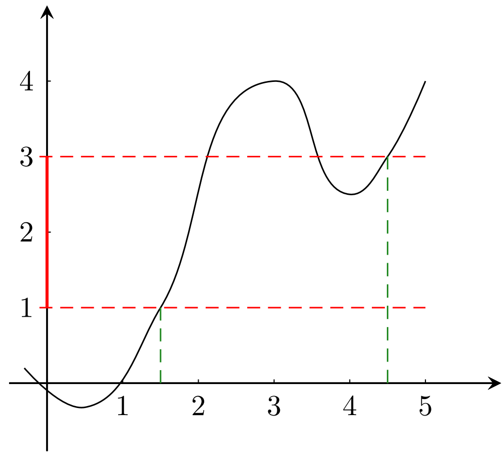
- ⋆ f étant continue, d'après la propriété ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
- ⋆ D'autre part, la suite (u_{n+1}) est extraite de la suite (u_n) donc elle converge vers la même limite, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
- ⋆ Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

Ainsi, pour une suite récurrence définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, la limite finie éventuelle est à rechercher parmi les solutions de l'équation $f(x) = x$ (appelées points fixes de la fonction).

Attention : il faut d'abord avoir justifié l'existence de la limite de (u_n) (par théorème de convergence monotone par exemple).

2) valeurs intermédiaires

Principe général : pour tracer la courbe d'une fonction continue, on ne lève pas le crayon, donc si la fonction atteint les valeurs 1 et 3, elle passera par toutes les valeurs intermédiaires entre 1 et 3 : on pourra par exemple trouver au moins une valeur de x telle que $f(x) = 2,5$.



Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 2$.
Prouver que l'équation $f(x) = -1$ a une solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α.

- ⋆ f est un polynôme donc c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ $f(-10) = -1028$ et $f(0) = 2$ et -1 est entre -1028 et 2.
- ⋆ Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, -1 a un antécédent par la fonction f.

Conséquences :

- Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle (« pas de trous »).
  Autrement dit : si f est une fonction continue, et I un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.
- Par une fonction continue, l'image d'un segment (intervalle fermé) est un segment.
  Ainsi, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Attention : l'image par une fonction continue f du segment $[a, b]$ n'est pas nécessairement $[f(a), f(b)]$!
Exemple : $f(x) = x^2$ sur le segment $[-3, 0]$, l'image est $[0, 9]$ qui correspond à $[f(0), f(-3)]$.
Et l'intervalle image pourrait aussi être plus grand que $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ (cas où la fonction n'est pas monotone).

3) bijection

Rappel : f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J signifie que tout nombre de J a un unique antécédent par f dans I.

Théorème de la bijection.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors en notant $J = f(I)$: f réalise une bijection de I sur J.
f a une réciproque définie sur J, continue, et de même sens de variation que f.

Concrètement :

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a;b]$, alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a;b]$, alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $[f(b),f(a)]$.
- Dans le cas où l'intervalle est ouvert d'un côté ou des deux, avec éventuellement des bornes infinies, on remplace $f(a)$ (ou $f(b)$) par la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$).

Exemples :

- la fonction inverse réalise une bijection de $[2\,;+\infty[$ sur $]0;0,5]$ car elle est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ avec $\frac{1}{2}=0,5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.
- la fonction carré réalise une bijection de $]-5;-1]$ sur $[1,25[$ car elle est continue et strictement décroissante sur $]-5;-1]$ avec $(-1)^2=1$ et $\lim\limits_{x\to-5} x^2=25$.
- la fonction carré est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ (continue et strictement croissante, $0^2=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$), et sa réciproque est la fonction racine carrée, continue et croissante sur $[0,+\infty[$.
- f est la fonction définie par $f(x)=\sqrt{2x^2+9}$ que l'on étudiera sur $[-6;0]$:

  $\star$ f est continue sur $[-6,0]$ car c'est la composée d'un polynôme (continu) à valeurs positives, par la racine carrée, continue sur $[0,+\infty[$.

  $\star$ variations : $f'(x)=\frac{2\times 2x}{2\sqrt{2x^2+9}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}$

  Pour x dans $[-6,0[$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $[-6,0]$.

  $\star$ $f(0)=3$ et $f(-6)=\sqrt{80}$

  Donc <u>f réalise une bijection de $[-6,0]$ sur $[3,\sqrt{80}]$</u>.

  En particulier, l'équation $f(x)=7$ a une unique solution sur $[-6,0]$ (car $7\in[3,\sqrt{80}]$) mais l'équation $f(x)=117$ n'en a pas ($117\notin[3,\sqrt{80}]$)