Limites de fonctions.

Exercice 1.

Justifier avec des quantificateurs, les limites usuelles suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ **(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Le but est de montrer par l'absurde que f n'a pas de limite en 0. On commence donc par supposer que la limite de f en 0 existe et vaut ℓ (nombre réel ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$.
Déterminer la limite de (u_n), et en déduire la limite de $f(u_n)$.

2. Calculer $f(u_n)$ et conclure sur l'existence ou non de la limite de f en 0.

3. Tracer la courbe de f sur la calculatrice pour confirmer.

Exercice 3.

Étudier la limite en a de la fonction f dans chacun des cas :

1. $a = 0$ et $f(x) = x^3 + \frac{\sqrt{x}}{x}$

2. $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$

3. $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

4. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(1+x^2) - x$

5. $a \geqslant 0$ et $f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

6. $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

7. $a = +\infty$ et $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 4.

1. Démontrer que $e^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.

2. On considère deux fonctions f et g telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Est-ce que $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?

3. Démontrer que $\sin(\arccos(x)) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

Exercice 5.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{\sin(h)}$.

2. Trouver un équivalent en 0 de $\frac{\cos(h)-1}{\sin(h)}$, et en déduire $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$.

Exercice 6.

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ (en 0 et $+\infty$) ; $g(x) = x + \sqrt{x}$ (en 0 et $+\infty$) ; $h(x) = \sin(x) + \cos(x) - 1$ (en 0)
$k(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ (en 0 et $+\infty$) ; $l(x) = e^x - 1 + x^2 + \sin^3(x)$ (en 0).

Exercice 7.

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en 0 :

$f(x) = \frac{e^x \sin(3x)}{x-\frac{3}{2}\sin(2x)}$ $\quad h(x) = \dfrac{x\ln(x)}{\sin(x)}$ $\quad l(x) = \dfrac{\sin(3x)\sin(5x)}{(x-x^3)^2}$ $\quad n(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

$g(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{\sin(x)}$ $\quad k(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^x-1}$ $\quad m(x) = \dfrac{xe^{\sin(x)}}{\ln(x)}$ $\quad p(x) = \dfrac{1+x^2}{\sin^2(x)}$

Exercice 8.

Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2)$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-7x+2}{x-11}$

Exercice 9.

1. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$ et $v_n = u_n - 1$.
Démontrer que (v_n) est géométrique, déterminer son terme général, et en déduire la limite de (u_n).

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{2x+1}{3}\right) = f(x)$.
Démontrer que pour tout n, $f(u_n) = f(u_0)$.
En déduire que f est constante.