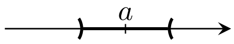
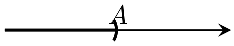
Limites de fonctions.

I. Limites, définitions et propriétés

1) Voisinages

Vocabulaire :

- Si $I =]2; +\infty[$, 2 et $+\infty$ sont les ***extrémités*** de I ou les ***bords***.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I ou une extrémité de I. On dit que f vérifie une propriété sur un ***voisinage de*** a lorsque cette propriété est vraie sur :
  - un intervalle de la forme $I \cap]a - \delta; a + \delta[$ lorsque a est un réel : 

  - un intervalle de la forme $I \cap] - \infty, A]$ lorsque $a = -\infty$: 

  - un intervalle de la forme $I \cap [A; +\infty[$ lorsque $a = +\infty$: 

Remarque : la notion de voisinage (notamment voisinage de $+\infty$) est à rapprocher de « à partir d'un certain rang » pour les suites.

Exemples :

- La fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 0,1$ est négative au voisinage de $+\infty$.
  En effet, pour tout x de $[10; +\infty[$, $f(x) \leqslant 0$.
- La fonction ln est positive au voisinage de 2.
  En effet, pour tout $x \in]1; 3[$, $\ln(x) \geqslant 0$ (correspond à la définition avec $\delta = 1$: $]1; 3[=]2 - 1; 2 + 1[$ et est inclus dans l'ensemble de définition de ln).
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$ est supérieure à 10 au voisinage de $-\infty$.
  En effet, pour $x \leqslant 5$, $g(x) \geqslant 10$.

2) Limite finie

Définition.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I. Et soit ℓ un nombre réel.
On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque pour tout ε strictement positif, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ sur un voisinage de a. Autrement dit :

⋆ si a est un réel : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in I \cap]a - \delta; a + \delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

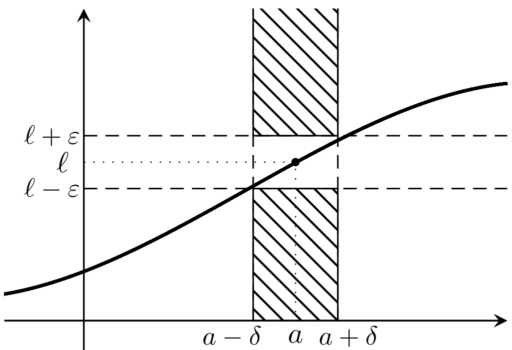
⋆ si a est $-\infty$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \in I \cap] - \infty, A] \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

⋆ si a est $+\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, x \in I \cap [A, +\infty[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

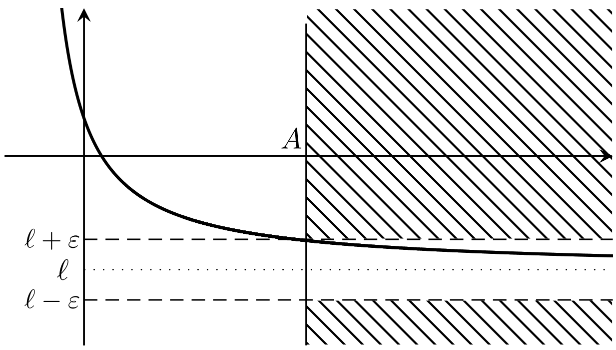
Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$:



Une marge ε étant fixée autour de ℓ, on a pu trouver δ pour que, lorsque x est entre $a - \delta$ et $a + \delta$, $f(x)$ soit dans la bande entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ (*pas dans la zone barrée*).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$:



Une marge ε est fixée, on a pu placer un nombre A tel que, lorsque x est supérieur à A, $f(x)$ soit dans la bande entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$.

On observe dans le cas où x tend vers $+\infty$ que la droite horizontale de hauteur ℓ est très proche de la courbe lorsque x est très grand :

Définition.

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est dite ***asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$***.

Exemple de limite finie : soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
sin est bornée par -1 et 1 donc pour tout x, $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leqslant 1$, donc $|f(x)| \leqslant 2|x|$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Justifions qu'avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, la définition de $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ est bien satisfaite :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap]0 - \delta; 0 + \delta[$, on a $|x| \leqslant \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap]0 - \delta; 0 + \delta[$, $|f(x)| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$. CQFD

3) Limite infinie

Définition : la limite est $+\infty$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a lorsque pour tout réel r, $f(x) \geqslant r$ sur un voisinage de a.
Autrement dit :

- ⋆ si a est un réel : $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ x \in I \cap]a - \delta; a + \delta[\Rightarrow f(x) \geqslant r$.
- ⋆ si a est $-\infty$: $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \in I \cap] - \infty, A] \Rightarrow f(x) \geqslant r$.
- ⋆ si a est $+\infty$: $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \in I \cap [A; +\infty[\Rightarrow f(x) \geqslant r$.

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition : la limite est $-\infty$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I.

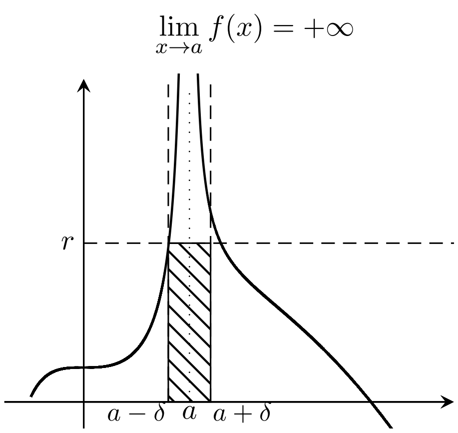
On dit la limite de f en a est $-\infty$ lorsque pour tout réel r, $f(x) \leqslant r$ sur un voisinage de a.

Autrement dit :

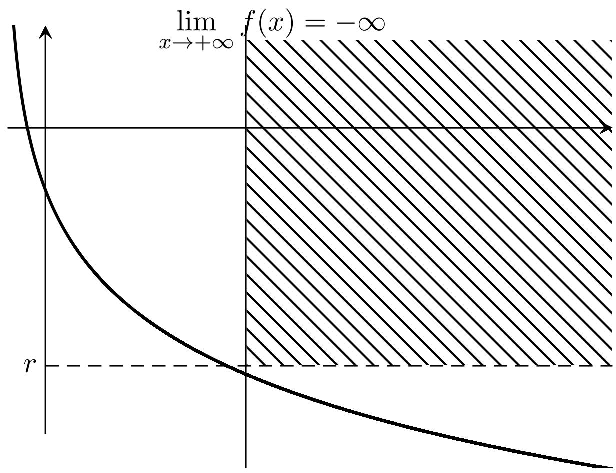
- ⋆ si a est un réel : $\forall r \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[\Rightarrow f(x) \leqslant r$.
- ⋆ si a est $-\infty$: $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \in I \cap] - \infty, A] \Rightarrow f(x) \leqslant r$.
- ⋆ si a est $+\infty$: $\forall r \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \in I \cap [A, +\infty[\Rightarrow f(x) \leqslant r$.

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :



Le seuil de hauteur r étant fixé (aussi haut que l'on veut), on a pu trouver un petit intervalle autour de a pour lequel toutes les valeurs de $f(x)$ sont au dessus du seuil (*pas dans la partie barrée*).



Le seuil de hauteur r étant fixé, on a pu trouver un réel A tel que lorsque x est plus grand que A, les valeurs de $f(x)$ sont plus petites que le seuil r (*pas dans la partie barrée*).

Définition.

Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, la droite verticale d'équation $x = a$ est dite ***asymptote à la courbe représentative de*** f.

4) Limite à gauche, à droite, continuité

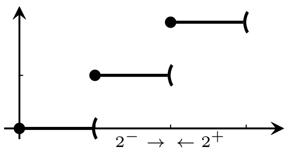
Définition.

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I ou une extrémité de I (mais ni $+\infty$ ni $-\infty$).

- On dit que f admet une ***limite à gauche*** en a si la restriction de f à $I\cap]-\infty;a[$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
- On dit que f admet une ***limite à droite*** en a si la restriction de f à $I\cap]a;+\infty[$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Exemples :

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x\to 2^-} \lfloor x\rfloor = 1$ car, la partie entière restreinte à $]-\infty,2[$ vaut 1 au voisinage de 2.
  Mais $\lim_{x\to 2^+} \lfloor x\rfloor = 2$ car la partie entière restreinte à $]2;+\infty[$ vaut 2 au voisinage de 2.



Propriété.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b$. ($b$ étant un nombre fini, ou $+\infty$ ou $-\infty$)

Propriété et définition.

Soit f définie sur I et $a \in I$.

- si a est la borne supérieure de I (autrement dit $I =]\cdot, a]$ ou $[\cdot, a]$) :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$
- si a est la borne inférieure de I (autrement dit $I = [a, \cdot\,]$ ou $[a, \cdot\,[$) :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$
- si a n'est pas au bord de I : (autrement dit a à l'intérieur de I)
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$
  On dit que f ***est continue en*** a si elle admet une limite finie en a,
  autrement dit si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Remarque : dans le cas où la fonction est continue, la limite est nécessairement $f(a)$.

Exemples :

- La fonction partie entière n'est pas continue en 2 (car d'après les limites calculées plus haut).
  Mais elle est continue à droite en 2, en effet $\lim_{x\to 2^+} \lfloor x\rfloor = 2$ et $\lfloor 2\rfloor = 2$
- La fonction valeur absolue est continue en 0 :
  $\star$ pour $x < 0$, $|x| = -x$ donc $\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$
  $\star$ pour $x > 0$, $|x| = x$ donc $\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$
  $\star$ et $|0| = 0$.

(*plus de détails sur la continuité dans un prochain chapitre* **Fonctions 7 - Continuité**)

5) Propriétés des limites

Propriété.

- Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.
- Si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
- Si f a une limite strictement positive en a, alors les valeurs de f sont positives dans un voisinage de a.
- Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$ (propriété dite du « passage à la limite »).

II. Déterminer les limites

1) Opérations

Les règles d'opérations sur les limites ont été déjà vues dans le chapitre Fonctions 1F - Limites : *à revoir* !

Rappel des formes indéterminées : « $0 \times \infty$ », « $\infty - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ».

Rappel de la règle de l'inverse :

lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$: $\star$ si $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

$\star$ si $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Composition de deux fonctions :

Théorème.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & u(x) \arrow[r, mapsto, "v"] & v\Big(u(x)\Big) \\
& X \arrow[r, mapsto] \arrow[dl] & v(X) \arrow[d] \\
a \quad \ell_1 & & \ell_2
\end{tikzcd}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{X\to \ell_1} v(X) = \ell_2$,

alors $\lim\limits_{x\to a} v\Big(u(x)\Big) = \lim\limits_{X\to \ell_1} v(X) = \ell_2$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2$?

on pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\sqrt{u(x)} + 2 = \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2$. (*autrement dit* $v(x) = \sqrt{x} + 2$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \sqrt{X} + 2 = 2$, donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2 = \lim\limits_{X\to 0} \sqrt{X} + 2 = 2}$

Composition d'une suite par une fonction :

Propriété.

Si (u_n) a pour limite a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.
En particulier si (u_n) converge vers a et que f est continue en a, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Cette propriété est très utile dans le cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ (comme vu dans l'exercice 7. du chapitre Suites 2), ou pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite (voir un exemple d'utilisation dans l'exercice 2.).

2) Limite par comparaison

On rappelle les théorèmes suivants (déjà vus pour les fonctions, et revus adaptés aux suites) :

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes).

f, g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I, avec au voisinage de a : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Théorème de limite par comparaison.

f et g sont définies sur un même intervalle I, et au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$:

$\star$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

$\star$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

3) Cas d'une fonction monotone

Là encore, une analogie très forte avec le théorème de la limite monotone pour une suite.

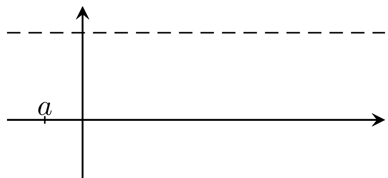
Théorème de la limite monotone.

Soit un intervalle $I =]a, b[$, a et b pouvant être réels ou infinis.

- si f est croissante :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \\ \inf\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est minorée} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \\ \sup\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$$



f croissante sur $]a, +\infty[$, majorée et non minorée

- si f est décroissante :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \\ \sup\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \\ \inf\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est minorée} \end{cases}$$

4) Comparaison de fonctions

Il s'agit ici d'étendre aux fonctions les notions de négligeabilité, domination et équivalence, vues sur les suites.

a. relations de comparaison

Définition.

Soient f et g des fonctions définies sur I, soit a dans I ou une extrémité de I.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

- f est ***dominée*** par g au voisinage de a si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$: « f est un grand O d g au voisinage de a ».
- f est ***négligeable*** devant g au voisinage de a lorsque $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$: « f est un petit o de g au voisinage de a ».
- f et g sont ***équivalentes*** au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemples :

- $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Pour les fonctions, impérativement préciser $x \to \ldots$

Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont la même limite en a.

b. comparaisons usuelles

puissances, polynômes, fraction rationnelle :

- Pour tous réels α et β $\boxed{\text{avec } \alpha < \beta : x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)}$.
- Un polynôme est équivalent <u>en ∞</u> à son terme de plus haut degré.
- Une fraction rationnelle est équivalente <u>en ∞</u> au quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

fonctions usuelles : $\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$

croissances comparées : α et β réels strictement positifs, et $a > 1$.

Au voisinage de $+\infty$: $\boxed{(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^x\right) \quad \text{et} \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^x\right)}$.

Au voisinage de 0 : $\boxed{(\ln(x))^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}$. (*autrement dit* $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta(\ln(x))^\alpha = 0$)

Au voisinage de $-\infty$: $\boxed{a^x \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}$. (*autrement dit* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x x^\beta = 0$)

c. équivalences, négligeabilité et opérations

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont définies sur un même ensemble I, et on suppose que a est un nombre de I ou un bord de I.
On suppose également qu'elles ne s'annulent pas au voisinage de a.
Alors

- $\boxed{\text{Si } g(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x)) \text{ alors } f + g \underset{a}{\sim} f.}$

- **Produit, quotient :** $\boxed{\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \Longrightarrow f_1 \times f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \times g_2 \quad \text{et} \quad \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}}$.

  En particulier $\boxed{\begin{array}{c} f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f \times h \underset{a}{\sim} g \times h \\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x)) \end{array}}$

  en particulier avec une des deux fonctions constante :
  $f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \Longleftrightarrow \lambda f_1 \underset{a}{\sim} \lambda g_1$

- **Puissance α avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$:** (on suppose de plus f à valeurs positives au voisinage de a) $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha}$.

- **Somme avec même équivalent :** α et β sont des réels

$$\boxed{\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} \alpha g \\ f_2 \underset{a}{\sim} \beta g \\ \alpha + \beta \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} (\alpha+\beta) g}$$

- **Changement de variable :** ici y est une fonction à valeurs dans I

$$\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} y(x) = a \\ f \underset{a}{\sim} g \end{cases} \Longrightarrow f(y(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} g(y(x))}$$

  Exemple de changement de variable : pour trouver un équivalent de $\sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

- **Domination et équivalence :**

$$\boxed{\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} u \\ f_2 \underset{a}{\sim} v \\ u(x) \underset{x\to a}{=} o(v(x)) \end{cases} \Longrightarrow f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(f_2(x))}$$

En effet, $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{u}{v}$ donc :

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$ car $u(x) \underset{x\to a}{=} o(v(x))$.

En particulier

$$\boxed{\begin{cases} f \underset{a}{\sim} u \\ u(x) \underset{x\to a}{=} o(v(x)) \end{cases} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} o(v(x))}$$

Exemple : $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $-\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{=} o(x)$
donc $\cos(x) - 1 \underset{x\to 1}{=} o(x)$.