# Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

## Exercice 1.

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + z = 0\}$.

**1.** Montrer que $(-1, -1, 1)$ appartient à $F$.

**2.** Montrer que $F = \text{Vect}\,((1, 2, 0), (0, 1, 1))$.

**3.** Déterminer deux réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tels que $(-1, -1, 1) = \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 1, 1)$.

## Exercice 2.

Déterminer trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ dans $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\right\} = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}).$$

## Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^4$, la famille $\mathcal{F} = \big((2, 0, 2, 1), (-2, 0, 2, 0), (2, 1, 4, 1)\big)$ est-elle libre ? génératrice ?

## Exercice 4.

**1.** Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**2.** Que peut-on en conclure sur la famille de vecteurs $F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$, avec $\overrightarrow{u_1} = (2, -2, 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, -1, 2)$, $\overrightarrow{u_3} = (3, -1, 2)$, $\overrightarrow{u_4} = (-2, -2, 3)$.

**3.** Soit $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer quatre réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ et $\lambda_4$ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \lambda_3\overrightarrow{u_3} + \lambda_4\overrightarrow{u_4}$.

## Exercice 5.

Soit $m$ dans $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de $m$, du caractère libre et du caractère générateur de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs $(1, 1, m)$, $(1, m, 1)$ et $(m, 1, 1)$.

## Exercice 6.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y - 2z - t = 0 \\ x - y + 2z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$.

En déduire le caractère libre ou générateur (de $\mathbb{R}^3$) de la famille formée par $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (-2, 2, 2)$ et $\overrightarrow{t} = (-1, 1, -1)$.

## Exercice 7.

Déterminer si les familles suivantes sont libres ? génératrices (de $\mathbb{R}^2$ pour le **1.** et $\mathbb{R}^3$ pour les autres) ?

**1.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
**2.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
**3.** $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

## Exercice 8.

Soient $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$. Montrer que $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{(x, y, 0) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.