# Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

**Rappel :** le rang d'une matrice est ..................................................................................

**Introduction en dimension 2 :** dans le plan, deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires lorsque .............

.........................................................................................................................

qui se traduit aussi par ..............................................................................................

On note $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Alors $\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$ se traduit par le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x_1 + \beta x_2 & = & 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 & = & 0 \end{array} \right.$.

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires si et seulement si $(0,0)$ est la seule solution du système.
Or $(0,0)$ est toujours une solution de ce système.
Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires si et seulement si le système a une unique solution, autrement dit la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ est de rang ....

On rappelle que 2 vecteurs non colinéaires forment une ***famille libre***, et 2 vecteurs colinéaires forment une ***famille liée***.
On peut donc résumer (et généraliser) ce qui précède : 2 vecteurs forment une famille libre si et seulement si la matrice formée par les coordonnées de ces vecteurs en colonne est de rang 2.

## I. Vocabulaire d'algèbre linéaire.

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est appelé ***vecteur***, on peut le noter en colonne, ou en ligne, par exemple pour un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$, ou $\overrightarrow{u} = (2, \frac{1}{3}, -3)$.

On note $\overrightarrow{0}$ (ou simplement $\mathbf{0}$), le ***vecteur nul*** : $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons ajouter deux vecteurs, et les multiplier par un nombre, tout comme avec les vecteurs du plan ou de l'espace. Le nombre que l'on multiplie s'appelle le ***scalaire***.

Par exemple, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ et $3\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} =$

(3 et $-4$ sont des ***scalaires***)

Et si $\overrightarrow{w} = (0, 1, 4)$ et $\overrightarrow{z} = (2, -1, \sqrt{2})$, on a $-\overrightarrow{w} + 3\overrightarrow{z} = \ldots$

Une ***famille de vecteurs*** est une succession de vecteurs, par exemple avec $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{z}$ ci-dessus, qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{F} = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{z})$ est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

**Définition.**

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des nombres de $\mathbb{R}$.

- On appelle ***combinaison linéaire*** de $\mathcal{F}$ tout vecteur de la forme $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \lambda_p\overrightarrow{u_p}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $\mathcal{F}$ est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$ :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{u_k} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

## II. Familles libres

**Définition.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- La famille $\mathcal{F}$ est ***libre*** lorsque la seule combinaison linéaire égale à $\overrightarrow{0}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls :
$$\text{si } \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0} \quad \text{alors} \quad \forall k \in [\![1, p]\!], \lambda_k = 0.$$
- Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, elle est dite ***liée*** : ..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

**Cas particuliers :**

⋆ deux vecteurs forment une famille libre si et seulement si ..............................................

⋆ trois vecteurs de l'espace forment une famille libre si et seulement si ..............................................

**Exemple :** soient $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est-elle libre ?

**Propriété.**

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On note $A$ la matrice dont les $p$ colonnes sont les coordonnées des vecteurs.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**(i)** la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre ;

**(ii)** le système homogène $AX = \mathbf{0}$ a pour seule solution $(0, 0, \dots, 0)$ ;

**(iii)** le rang de $A$ est $p$ (autrement dit : le nombre de pivots est le nombre de colonnes).

**Méthode :** pour savoir si des vecteurs forment une famille libre ou liée, on peut échelonner (avec pivot de Gauss) la matrice formée par les vecteurs en colonnes, et compter le nombre de pivots : s'il y en a autant que de colonnes, la famille est libre, sinon elle est liée.

## III. Familles génératrices

**Définition.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
La famille $\mathcal{F}$ est ***génératrice*** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exemple :** la famille formée par $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

**Propriété.**

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On note $A$ la matrice dont les $p$ colonnes sont les coordonnées des vecteurs.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**(i)** la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ ;

**(ii)** pour tout $B$ de $\mathbb{R}^n$, le système $AX = B$ est compatible ;

**(iii)** le rang de $A$ est $n$ (autrement dit . . .

**Méthode :** pour déterminer si une famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$, on peut échelonner la matrice formée des vecteurs en colonnes, et compter le nombre de pivots : s'il y en a autant que de lignes, la famille est génératrice, sinon elle ne l'est pas.