

Systèmes linéaires.

Exercice 1.

Écrire les matrices augmentées des systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y + z = 7 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + y + z - 4t = 3 \\ x - y + 2t = 3 \end{cases}$$

Exercice 2.

Dans chaque cas, effectuer les opérations demandées :

$$(S_1) \begin{cases} 6x + 2y - t = 12 \\ 2x - 3y + 4z - 5t = 11 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$(S_1) \iff \begin{cases} = \\ = \end{cases}$$

$$(S_1) \iff \begin{cases} = \\ = \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{L} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{L} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3y - 6z = -3 \\ -3x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{array}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{2}L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = -5 \\ 2x - y - 4z = -11 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x - 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} ix - iy = 1 + i \\ -x + iy = 1 - i \end{cases}$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes suivants par le pivot de Gauss :

$$(a) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = -9 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 7y = 2 \\ 3x - 10y = -1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} -2x + 5y + 4z = -17 \\ x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les deux droites sont sécantes, strictement parallèles ou confondues. On précisera selon le cas, les coordonnées du point d'intersection ou un vecteur directeur.

1. $D_1 : 3x + 5y - 2 = 0$ et $D_2 : x - 2y + 3 = 0$
2. $D_1 : 2x - 4y + 1 = 0$ et $D_2 : -5x + 10y + 3 = 0$

Exercice 6.

Résoudre selon les valeurs du paramètre m :

$$(a) \begin{cases} x + (m+1)y = m+1 \\ mx + (m+4)y = 2 \end{cases}$$

$$*(b) \begin{cases} (m+1)x - my = 5m+3 \\ mx + (m-1)y = m+2 \end{cases}$$

Exercice 7.

Soit (S) un système de 2 équations et 3 inconnues.

Discuter les affirmations suivantes (toujours vraie ? possible dans certains cas ? impossible ?).

- (a) Le rang de (S) est au maximum 2.
- (b) Si le système (S) a une solution, alors il en a une infinité.
- (c) Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système (S) a une infinité de solutions.

Exercice 8.

Soit a un nombre réel.

Déterminer selon les valeurs de a le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$.