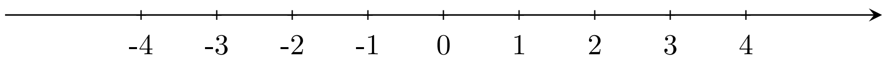
Nombres réels

Jusqu'à la fin du 19ième siècle, les mathématiciens avaient une vision intuitive des nombres réels et de leurs propriétés. Le développement de l'analyse (limites, continuité ...) a nécessité une construction plus rigoureuse de l'ensemble des réels : Cantor et Dedekin entre autres ont proposé des constructions précises.

I. Ordre et signes dans $\mathbb{R}$

1) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels se représente sur une droite graduée et orientée, appelée ***droite réelle***.



Sur $\mathbb{R}$, il existe un ordre qui permet de comparer deux nombres réels, c'est-à-dire savoir lequel est supérieur ou égal à l'autre.
Cet ordre se traduit par l'orientation de la droite, mais aussi par la relation suivante : $\boxed{x \leqslant y \Longleftrightarrow x - y \leqslant 0}$.
Il s'agit d'une ***relation d'ordre***, qui est :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$
- antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x\big) \Longleftrightarrow x = y$
- transitive : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \Big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\Big) \Longrightarrow x \leqslant z$

Rappels : inégalités et opérations.

- addition d'un même terme : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, ...
- addition d'inégalités : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ ....
- multiplication par un même nombre : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, ...
  $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^*$, ...
- inverse : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow$ ....
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y < 0 \Longleftrightarrow$ ....

2) Rappels sur les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition.

Soient a et b deux nombres réels (avec $a < b$), on note :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ c'est un ***segment*** $[a,b[= \{$ .... intervalle ***semi-ouvert***

$]a,b[= \{$ .... (intervalle ***ouvert***) $]a,b] = \{$ ....

$[a,+\infty[= \{$ .... (intervalle ....) $]-\infty,b] = \{$ .... (intervalle ....)

$]a,+\infty[= \{$ .... (intervalle ....) $]-\infty,b[= \{$ .... (intervalle ....)

$]-\infty,+\infty[$ (soit $\mathbb{R}$) et $]a,a[$ (soit $\emptyset$) sont des ***intervalles fermés et ouverts*** de $\mathbb{R}$.

Propriété. Caractérisation des intervalles.

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, alors $[a,b] \subset I$.

Cela signifie qu'un intervalle est « en un seul morceau », « sans trou ».

3) Rappels et complément sur la valeur absolue

Définition.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la ***valeur absolue*** de x par $|x| =$

On définit la ***distance*** entre deux réels x et y par $d(x, y) = |x - y|$.

Exemples : $d(3, 5) =$.................................... $d(5, 3) =$....................................

En fait, $d(x, y) = \begin{cases} & \text{si} \\ & \text{si} \end{cases}$

Propriété.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|xy| =$ .... et, pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| =$ ......

Et l'***inégalité triangulaire*** est vraie : $\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|}$.

Propriété.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Interprétation : $|x - a| < \varepsilon$ signifie que ....

II. Majoration, minoration

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que M est un ***majorant*** de A si ....

On dit que m est un ***minorant*** de A si ....

Une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un majorant (respectivement minorant) est dite ***majorée*** (respectivement ***minorée***) : ....

Une partie majorée et minorée est ....

Propriété.

Une partie A de $\mathbb{R}$ est .... si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant M$.

Exemples : $A = [-2; 4[$: voici des minorants : ...., et des majorants : ....
A admet-elle un majorant qui appartient à A ?

Définitions.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée et que l'un des majorants appartient à A, ce dernier est appelé ***plus grand élément*** ou ***maximum***, on peut le noter $\max(A)$. Et s'il existe il est unique.
  Si A est minorée ....
  ....
- Si A est majorée et que l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément S, alors S est appelé ***borne supérieure*** de A et noté $S = \sup(A)$ (autrement dit S est le plus petit majorant).
  Si A est minorée et que l'ensemble de ses minorants admet ....
  ....

Exemples :

⋆ $A = [-2, 4[$: d'après les calculs de la page précédente, ...

De plus, l'ensemble des majorants de A est ....

....

A a un minimum : ...

L'ensemble des minorants de A est ....

....

⋆ $B =]-\infty, 1]$

Remarque 1 : la borne supérieure S d'un ensemble A vérifie les deux propriétés suivantes (et ces deux propriétés caractérisent la borne supérieure) :

⋆ $\forall x \in A,\ x \leqslant S$

⋆ $\forall S' < S,\ \exists x \in A, x > S'$

la borne inférieure ....

....

....

....

Remarque 2 : si un ensemble admet un plus grand élément, alors il a une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$. Idem pour plus petit élément et borne inférieure.

Propriété de la borne supérieure.

....

....

Remarque : tous les ensembles de nombres ne possèdent pas cette propriété de la borne supérieure.
Par exemple, $\mathbb{Q}$ ne possède pas cette propriété : $A = \{q \in \mathbb{Q},\ q^2 \leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

III. Partie entière, approximation décimale

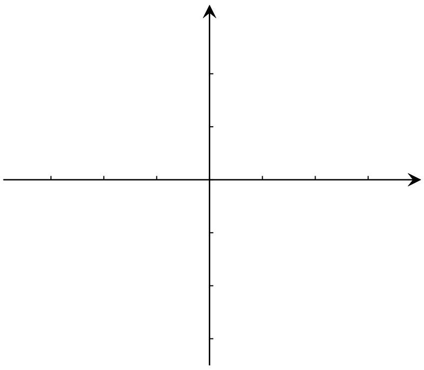
1) Partie entière

Propriété.

Soit x dans $\mathbb{R}$.
Il existe un unique nombre entier, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Cet entier est appelé ***partie entière*** de x.

Exemples : $\lfloor 3,7 \rfloor = \dots\dots\dots$ et $\lfloor -2,1 \rfloor = \dots\dots\dots$

Remarque : la partie entière est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Voici sa représentation graphique :



2) Approximation décimale

Rappels :

- $10^{-n} = \dots$ par exemple $10^{-2} = \dots$

- $\mathbb{D}$ est .... On peut écrire $\mathbb{D} =$ ....

Définition.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que $a \in \mathbb{D}$ est une ***valeur décimale approchée*** de x à 10^{-n} près lorsque $|x - a| \leqslant 10^{-n}$.
Si $a \leqslant x$, on dit que a est une ***valeur approchée par défaut***.
Si $a \geqslant x$, on dit que a est une ***valeur approchée par excès***.

Exemples :

1. Justifier que $0,693$ et $0,694$ sont des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près de $\ln(2)$. (on précise que $\ln(2) \approx 0,6931472$

2. Déterminer la valeur décimale approchée à la précision 10^{-4} de π, par défaut, puis par excès.
On sait que $\pi \approx 3,141592\dots$.

En fait $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor + 1$.

Donc $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

Et les nombres $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$ sont des nombres décimaux, on en déduit la propriété suivante.

Propriété.

$\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est la valeur décimale approché de x à 10^{-n} près par défaut,

$\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$ est la valeur décimale approché de x à 10^{-n} près par excès.