Comparaison des suites.

Conseils pour les déterminations d'équivalents :

- Identifier à chacune de vos étapes, la règle utilisée, parmi les suivantes (en bleu, les justifications que l'on n'écrira que pour ce TD, pas nécessaires en DS, et en rouge celles qu'il faut toujours écrire, en toutes lettres) :
  - règle sur polynôme ou fraction rationnelle (notée poly, frac rat)
  - théorème des croissances comparées (notée thcc)
  - équivalents des fonctions usuelles en justifiant bien que u_n tend vers 0 (notée usu)
  - propriété de transitivité (notée trans)
  - propriété « du petit o » : si $v_n = o(u_n)$, alors $u_n + v_n \sim u_n$ (notée)
  - produit, quotient ou puissance (dont la racine carrée) (notés produit, quotient, puissance)
  - somme avec le même équivalent (notée somme avec le même équivalent) à bien présenter !!
  - si $u_n = o(v_n)$, alors pour tous α et β non nuls, $\alpha u_n = o(\beta v_n)$ (se fait naturellement, inutile de la noter)

  Toute autre transition entre deux étapes sera fort probablement fausse …
- Bien structurer la présentation pour l'utilisation du produit, quotient, somme avec le même équivalent :

  > ⋆ *premier facteur ou terme* $\ldots \sim \ldots$
  >
  > ⋆ *deuxième facteur ou terme* $\ldots \sim \ldots$
  >
  > Donc, par produit (quotient, ou somme avec le même équivalent en montrant que $\alpha + \beta \neq 0$) : $\boxed{\ldots \sim \ldots}$

- En cas de doute sur un équivalent ou un o, étudier la limite du quotient pour vérifier !
- Pas d'équivalents à 0 (cela a tendance à se produire avec des racines carrées, dans ce cas penser à la technique des la quantité conjuguée).

Exercice 1.

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites ci-dessous, et en déduire leur limite.

(a) $u_n = \frac{n^5+4n^3-7n+11}{(n+2)^3}$

(b) $u_n = \frac{n-\ln(n)+\frac{4}{n}}{e^n-n^2}$

(c) $u_n = \frac{3^{n+1}+n^4}{2^n+n}$

(d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(e) $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$

(f) $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

(g) $u_n = \frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln(n)-2n^2}$

(h) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$

(i) $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

(j) $u_n = \frac{\sin(n)+2^n}{n^3-7n}$

(k) $u_n = \sin\left(\frac{2}{n^4}\right)$

(l) $u_n = \frac{e^n+e^{-n}}{2}$

(m) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

***(n)** $u_n = e^{\sin\left(\frac{5}{n^3}\right)} - 1$

***(o)** $u_n = \binom{n}{p}$ (pour p fixé)

Exercice 2.

Classer par ordre de négligeablilité les suites dont les termes généraux sont $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$ et $\frac{1}{n\ln(n)}$.

* Exercice 3.

Déterminer les limites des suites dont le terme général est ci-dessous :

(a) $u_n = \frac{\ln(n^3+n)}{\ln(n^2+2^n)}$

(b) $v_n = (2n + (\ln(n))^3)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

(c) $w_n = \left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si le reste est terminé :

Exercice 4.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n, a_n et b_n sont bien définis et tels que $0 < a_n < b_n$.

2. Déterminer les variations de (a_n) et (b_n).

*** 3.** En déduire que (a_n) et (b_n) sont convergentes, et justifier qu'elles ont la même limite.