Comparaison de suites.

I. Relations de comparaison

Définition.

Soient u et v des suites, on suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- La suite (u_n) est ***dominée*** par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
  On note $u_n = O(v_n)$: « u_n est un grand O de (v_n) ». (*uenneètungrandtodevéenne*)
- La suite (u_n) est ***négligeable*** devant (v_n) lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
  On note $u_n = o(v_n)$: « u_n est un petit o de (v_n) ». (*uenneètunpetitodevéenne*)
- Les suites (u_n) et (v_n) sont ***équivalentes*** si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.
  On note $u_n \sim v_n$: « (u_n) est équivalente à (v_n) ».

Exemples : les suites ci-dessous sont définies pour $n \geqslant 1$.

- $u_n = n^2 + 3n - 2$ et $v_n = n^2$:
  $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2+3n-2}{n^2} = 1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\underline{u_n \sim v_n}$.

- $u_n = \sin(n)$ et $v_n = n^3$:
  On étudie le quotient $\frac{u_n}{v_n}$: $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et $n^3 > 0$ pour $n > 1$ donc $\frac{-1}{n^3} \leqslant \frac{\sin(n)}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n^3} = 0$
  donc $\underline{\sin(n) = o(n^3)}$.

- $u_n = 2n + 4$ et $v_n = n$:
  $\frac{u_n}{v_n} = \frac{2n+4}{n} = 2 + \frac{4}{n}$.
  Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{4}{n} \leqslant 4$ donc $2 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant 6$ donc $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.
  Donc $\underline{u_n = O(v_n)}$.

Propriété.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec (v_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Démonstration :

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} - 1 = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Remarque : si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors c'est la même chose de dire $u_n \sim v_n$ ou $v_n \sim u_n$.

Propriété.

On suppose que $u_n \sim v_n$.

$\star$ si (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ ;
$\star$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$), alors (v_n) a la même limite
$\star$ si (u_n) n'a pas de limite, (v_n) n'en a pas non plus.
En résumé : deux suites équivalentes ont la même limite.

Pour déterminer une limite, on peut d'abord trouver un équivalent avec une suite dont on connaît la limite.

II. Comparaisons usuelles

Propriété : puissances, polynômes.

Pour tous réels α et β positifs avec $\alpha < \beta$: $n^\alpha = o(n^\beta)$.
Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Exemples :

- $5n^2 - 3n + 4 \sim 5n^2$.
  En effet, $\frac{5n^2-3n+4}{5n^2} = \frac{5n^2(1-\frac{3}{5n}+\frac{4}{5n^2})}{5n^2} = 1 - \frac{3}{5n} + \frac{3}{5n^2}$
  $$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{5n} + \frac{3}{5n^2} = 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2-3n+4}{5n^2} = 1 \text{ donc } \underline{5n^2 - 3n + 4 \sim 5n^2}.$$
  (On peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2 - 3n + 4 = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2 = +\infty$.)

- $\sqrt{n} = o(n)$.
  En effet, $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n} = 0$ donc $\sqrt{n} = o(n)$.

Théorème des croissances comparées.

Soient α et β des réels strictement positifs, et q un réel vérifiant $q > 1$.
Alors $(\ln(n))^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ et $n^\beta = o\left(q^n\right)$ et $(\ln(n))^\alpha = o\left(q^n\right)$.

Exemples : $\ln(n) = o(\sqrt{n})$; $n^{2020} = o(1,1^n)$

Théorème : équivalents des fonctions usuelles.

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0.
Alors : $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ $\quad \ln(1+u_n) \sim u_n$
$\sin(u_n) \sim u_n$ $\quad \tan(u_n) \sim u_n$ $\quad \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$

Exemples :

- $\sin\left(\frac{3}{n}\right) \sim \frac{3}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$
- $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1 \sim \frac{1}{\ln(n)}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$.

III. Propriétés des relations de comparaison

Propriété.

Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, donc $\frac{u_n}{v_n}$ est positive à partir d'un certain rang, ce qui signifie que u_n et v_n seront de même signe à partir de ce rang.

Propriété.

u, v, w sont des suites non nulles à partir d'un certain rang :

- les relations sont ***transitives*** : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$;
  si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;
  si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
- $u_n + o(u_n) \sim u_n$, autrement dit $\boxed{\text{si } v_n = o(u_n), \text{ alors } u_n + v_n \sim u_n}$.

Propriété : produit, quotient, puissances.

- $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{cases} \Longrightarrow u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n$ et $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.
- On suppose $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, et soit α un nombre réel.
  Alors : $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (en particulier $u_n \sim v_n \Longrightarrow \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$)

Exemples :

- $\dfrac{n^3-3n^2+11n-1}{4n^5-2n^3+3n-4}$?

  $n^3-3n^2+11n-1 \sim n^3$ et $4n^5-2n^3+3n-4 \sim 4n^5$ (polynômes)

  Donc en faisant le quotient des équivalents : $\dfrac{n^3-3n^2+11n-1}{4n^5-2n^3+3n-4} \sim \dfrac{n^3}{4n^5} \sim \dfrac{1}{4n^2}$.

  On peut retenir (et utiliser) : une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- $\dfrac{(3n-4)(-n^2+2n-2)}{11n+3} \sim \dfrac{3n\times(-n^2)}{11n} \sim \dfrac{-3n^2}{11}$

- $\dfrac{\ln(n)+n^2}{3n^3+3n+3}$?
  d'après le théorème des croissances comparées, $\ln(n)=o(n^2)$, donc $\ln(n)+n^2 \sim n^2$.
  Et $3n^3+3n+3 \sim 3n^3$.
  Donc par quotient, $\dfrac{\ln(n)+n^2}{3n^3+3n+3} \sim \dfrac{n^2}{3n^3} \sim \dfrac{1}{3n}$.

Attention : on ne fait pas la « somme » d'équivalents : $n^2+n \sim n^2+2$ et $-n^2 \sim -n^2+2$ mais n n'est pas équivalent à 2.
(*autre illustration dans l'exercice à la fin*)

Propriété : somme avec même équivalent.

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right. \implies \alpha u_n + \beta v_n \sim (\alpha+\beta) w_n \text{ pour tous } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels tels que } \alpha+\beta \neq 0.$$

Exemple : $\sqrt{n^3-n^2+1} - 2\sqrt{n^3+1}$:
⋆ $n^3-n^2+1 \sim n^3$ donc, par puissance $\frac{1}{2}$, $\sqrt{n^3-n^2+1} \sim \sqrt{n^3}$
⋆ de même $\sqrt{n^3+1} \sim \sqrt{n^3}$
Or $1+(-2) = -1 \neq 0$, donc $1\sqrt{n^3-n^2+1} - 2\sqrt{n^3+1} \sim -\sqrt{n^3}$

IV. Exercices classiques

1. Déterminer des équivalents des suites et en déduire les limites : $u_n = \frac{n^2+1}{e^n-n}$; $v_n = \frac{2^n-1}{4^n-3}$; $w_n = \frac{(\sqrt{n}+1)^2(\sqrt{n}+3)}{2n\sqrt{n}+5}$.

- u_n :
  $\left.\begin{array}{l} n^2+1 \sim n^2 \\ n = o(e^n) \text{ donc } e^n - n \sim e^n \end{array}\right\}$ donc par quotient d'équivalents, $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^2}{e^n}}$.
  De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ par le théorème des croissances comparées.
  Donc on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n}$.

- v_n :
  $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ donc } 1 = o(2^n) \text{ donc } 2^n - 1 \sim 2^n \\ \text{de même, } 4^n - 3 \sim 4^n \end{array}\right\}$ donc par quotient d'équivalents, $v_n \sim \frac{2^n}{4^n}$
  Donc $\boxed{v_n \sim \frac{1}{2^n}}$.
  Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

- w_n :
  - ⋆ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $1 = o(\sqrt{n})$ donc $\sqrt{n}+1 \sim \sqrt{n}$.
    Par la règle sur les puissances d'équivalents, on déduit $(\sqrt{n}+1)^2 \sim \sqrt{n}^2 \sim n$.
    De même, $\sqrt{n}+3 \sim \sqrt{n}$.
    Donc, par la règle du produit d'équivalents, $(\sqrt{n}+1)^2(\sqrt{n}+3) \sim n\sqrt{n}$.
  - ⋆ $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{2n\sqrt{n}} = 0$ donc $2n\sqrt{n}+5 \sim 2n\sqrt{n}$
  - ⋆ donc par quotient, $w_n \sim \frac{n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}$ donc $\boxed{w_n \sim \frac{1}{2}}$.

  Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}}$.

2. Déterminer un équivalent de $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$.
Déterminer un équivalent puis la limite de $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$.

⋆ $n^2+n \sim n^2$ donc par les puissances, $\sqrt{n^2+n} \sim \sqrt{n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } \sqrt{n^2+n} \sim n \\ \text{de même, } \sqrt{n^2+1} \sim n \end{array}\right\} \text{donc par somme avec même équivalent, } 1\sqrt{n^2+n}+1\sqrt{n^2+1} \sim (1+1)n$$

⋆ on ne peut pas faire le même raisonnement pour $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ car alors $1+-1=0$ et la formule ne s'applique pas.
Nous rencontrons le même problème que pour les formes indéterminées, la même solution va marcher : la quantité conjuguée.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\end{aligned}$$

Or $n-1 \sim n$ et $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1} \sim 2n$ d'après ce qui est fait plus haut.
Donc par quotient d'équivalents, $\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n}{2n}$ autrement dit $\boxed{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} \sim \frac{1}{2}}$.

Et ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} = \frac{1}{2}}$.