Plans, droites et sphères dans l'espace.

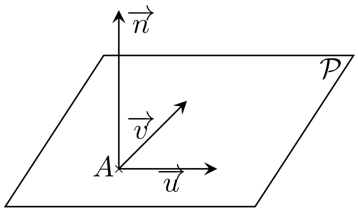
Dans tous le chapitre, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

I. Plans

Il y a trois façons de définir un plan de l'espace :

Définition.

- $\star$ Soient A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
  On appelle ***plan passant par*** A ***de vecteurs directeurs*** $\overrightarrow{u}$ ***et*** $\overrightarrow{v}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires.
- $\star$ Soient A, B et C trois points non alignés. Le ***plan*** (ABC) est le plan passant par A est de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- $\star$ Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. On appelle ***plan passant par*** A ***et de vecteur normal*** $\overrightarrow{n}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux.



Remarque : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal.

1) Équations de plan

a. Équation cartésienne

Propriété.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.
Réciproquement, tout plan de l'espace a une équation de type $ax+by+cz+d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Une équation de ce type est appelée ***équation cartésienne*** de plan.

Méthode pour obtenir une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ ...

... passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$:

$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_A & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_A & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ et pour calculer le déterminant :

... passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Exemples :

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points $A(1,2,-1)$, $B(1,3,1)$ et $C(0,3,-1)$.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A(1,2,-1)$ et normal à $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété.

Dans une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur normal.

b. Système d'équations paramétriques

Propriété.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \alpha_1 s + \alpha_2 t + x_A \\ y = \beta_1 s + \beta_2 t + y_A \\ z = \gamma_1 s + \gamma_2 t + z_A \end{cases}$

Ce système est appelé ***système d'équations paramétriques de $\mathcal{P}$***.

Cela signifie que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(\alpha_1 s+\alpha_2 t+x_A, \beta_1 s+\beta_2 t+y_A, \gamma_1 s+\gamma_2 t+z_A)$ lorsque s et t décrivent $\mathbb{R}$.

Exemples :

⋆ voici un système d'équations paramétriques d'un plan $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = s-1 \\ y = t+s+1 \\ z = 2t-s+2 \end{cases} \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$

Ce plan passe par le point $A(\ldots, \ldots, \ldots)$ et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$.

⋆ déterminer un système d'équations paramétriques du plan passant par les points $A(1,2,-1)$, $B(1,3,1)$ et $C(0,3,-1)$:

c. Lien entre équation cartésienne et système d'équations paramétriques

Pour passer d'une équation cartésienne à un système d'équations paramétriques, on peut se servir de deux coordonnées comme paramètres et exprimer la dernière en fonction des deux autres (par exemple, $x = s$ et $y = t$ et isoler z dans l'équation cartésienne).
Exemple avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x + 6y - 3z + 4 = 0$.

$2x + 6y - 3z + 4 = 0 \Longleftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.

Donc voici un système d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x = s \\ y = t \\ z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$

Pour passer d'un système d'équations paramétriques à une équation cartésienne, on peut lire un point et deux vecteurs directeurs dans le système et utiliser le déterminant, ou on peut isoler les paramètres dans les deux premières équations et remplacer dans la dernière, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} x = s - 1 \\ y = t + s + 1 \\ z = 2t - s + 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s = \dots\dots\dots \\ y = t + (\dots\dots\dots) + 1 \\ z = 2t - s + 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s = x + 1 \\ t = \dots\dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

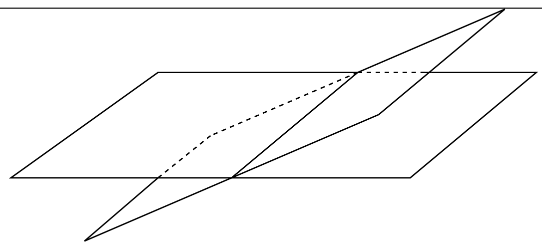
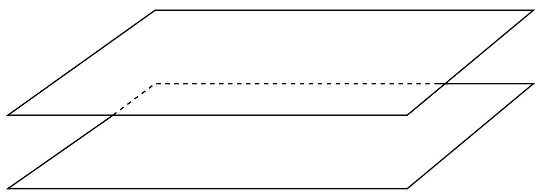
Ainsi, une équation cartésienne de ce plan est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2) Positions relatives de plans

Propriété.

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Autrement dit, si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, alors :

- ⋆ si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ;
- ⋆ si (a, b, c, d) et (a', b', c', d') sont proportionnels, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ;
- ⋆ si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et leur intersection est une droite.

sécants	strictement parallèles
	
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, ils ont une droite d'intersection : $\mathcal{D}$. $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \dots\dots$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont aucun point commun $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \dots\dots$

Exemples : soient $\mathcal{P}_1$ un plan d'équation $2x - 3y + z + 7 = 0$, $\mathcal{P}_2 : -4x + 6y - 2z - 7 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : -2x + 3y - z - 7 = 0$ et enfin $\mathcal{P}_4 : 12x - 18y - 6z + 14 = 0$.

⋆ $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

⋆ $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

⋆ $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_4$ sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

II. Droites de l'espace

Il y a trois façons de définir une droite de l'espace :

Définition.

- ⋆ Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
  On appelle ***droite passant par** A **de vecteur directeur*** $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.
- ⋆ Soient A et B deux points de l'espace, ***la droite*** (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
- ⋆ Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$, alors l'intersection des plans est une droite, dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Remarque : toute droite de l'espace peut être vue comme l'intersection de deux plans sécants.

1) Équations de droites dans l'espace

a. Système d'équations paramétriques

Propriété.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, alors :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = t\alpha + x_A \\ y = t\beta + y_A \\ z = t\gamma + z_A \end{array} \right.$$

Ce système est appelé ***système d'équations paramétriques de*** $\mathcal{D}$.

Exemple : soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $A(3,-4,2)$ et $B(2,1,0)$.

b. Équation cartésienne

Propriété.

Toute droite, étant l'intersection de deux plans sécants, peut être représentée par un système de deux équations cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } (a,b,c) \text{ et } (a',b',c') \text{ non proportionnels.}$$

c. Lien entre système d'équations cartésiennes et système d'équations paramétriques

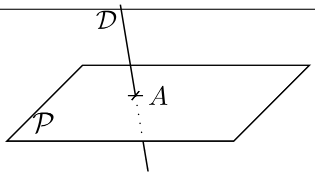
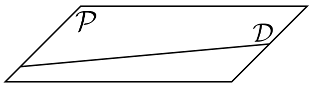
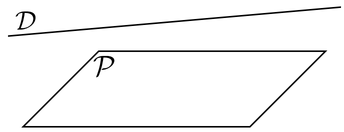
Pour passer d'un système d'équations paramétriques à des équations cartésiennes, on isole t dans l'une des équations et on substitue dans les deux autres.
Par exemple, pour la droite $\mathcal{D}_1$ précédente, ...

Pour passer d'un système d'équations cartésiennes à un système d'équations paramétriques, on peut se servir d'une des inconnues comme paramètre, et résoudre le système formé par les deux autres inconnues qui deviennent inconnues principales.

Déterminons par exemple un système d'équations paramétriques de la droite donnée par $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{array} \right.$.

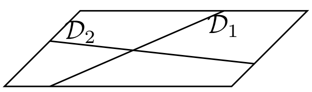
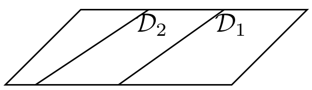
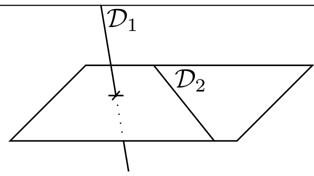
2) Positions relatives ...

... d'une droite et un plan $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

droite sécante au plan	droite parallèle au plan	
	droite contenue dans le plan	strictement parallèle
		
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point d'intersection : A. $\mathcal{D}\cap\mathcal{P} = \ldots$	$\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$ $\mathcal{D}\cap\mathcal{P} = \ldots$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection $\mathcal{D}\cap\mathcal{P} =$ ..
si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, on dit que $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$	$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ sont	

Exemples : soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x - 2y - 7z + 1 = 0$ et le point $C(2, 0, 1)$, on appelle $\mathcal{D}_1$ (respectivement $\mathcal{D}_2$) la droite passant par C dirigée par $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (respectivement $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

... de deux droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

droites coplanaires		droites non coplanaires
		
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes : $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont strictement parallèles : $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2 =$	aucun plan ne contient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2 =$ .....
$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ non colinéaires	$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ colinéaires	$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ non colinéaires

Remarque 1 : deux droites coplanaires peuvent aussi être confondues ($\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ colinéaires).

Remarque : si les vecteurs directeurs de deux droites sont orthogonaux, on dit que les droites sont ***orthogonales***, et si de plus elles sont sécantes, elles sont dites ***perpendiculaires***.

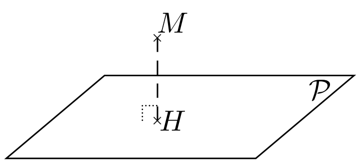
III. Distances et projetés orthogonaux

1) Point et plan

Définition.

Soient $\mathcal{P}$ un plan et M un point.

- ⋆ Si M n'appartient pas au plan, le ***projeté orthogonal*** de M sur $\mathcal{P}$ est le point H appartenant à $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit normal au plan.
- ⋆ Si M appartient au plan, le projeté est lui-même.



Exercice : Soient $M(1,1,-2)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x-4y+5z+9=0$.
Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Méthode pour trouver les coordonnées du projeté $H_{\mathcal{P}}$ du point M sur un plan $\mathcal{P}$:

1) $(MH_{\mathcal{P}})$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ donc il existe λ tel que $\overrightarrow{MH_{\mathcal{P}}}=\lambda\overrightarrow{n}$;
on en déduit les coordonnées de $H_{\mathcal{P}}$ en fonction de λ
2) pour trouver λ : on utilise le fait que les coordonnées de $H_{\mathcal{P}}$ vérifient l'équation du plan.

Définition.
La ***distance d'un point*** M ***à un plan*** $\mathcal{P}$ est la distance entre le point M et son projeté orthogonal H sur le plan.

Remarque : la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est aussi la plus petite distance entre A et un point de $\mathcal{P}$.

Propriété.

- Si $\mathcal{P}$ est défini par une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{P})=\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}}.$$

- Si $\mathcal{P}$ est défini par un point A et deux vecteurs non colinaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{P})=\frac{|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}}.$$

Justifications :

- voir **exercice ...**
- $|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|$ représente ....

  $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|$ représente ....

  Ainsi le quotient est ....

2) Point et droite

Définition.
Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point.
⋆ Si M n'appartient pas à $\mathcal{D}$, le ***projeté orthogonal de*** M ***sur*** $\mathcal{D}$ est ....
....
⋆ Si M appartient à $\mathcal{D}$, ...

Exemple : déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(2,0,-1)$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Méthode pour trouver le projeté $H_{\mathcal{D}}$ du point M sur une droite $\mathcal{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{v}$:

1) A et H sont sur $\mathcal{D}$ donc il existe λ tel que $\overrightarrow{AH_{\mathcal{D}}} = \lambda \overrightarrow{v}$;
   on en déduit les coordonnées de $H_{\mathcal{D}}$ en fonction de λ
2) pour trouver λ : on utilise $\overrightarrow{MH_{\mathcal{D}}}.\overrightarrow{v} = 0$.

Définition.
De même que dans le plan, la ***distance d'un point*** M ***à une droite*** $\mathcal{D}$ est ....
....

Propriété.
$\mathcal{D}$ est une droite passant par un point A et dirigée par $\overrightarrow{v}$, et M est un point de l'espace.
Alors $\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}}$.

IV. Sphères

1) Définition et équation cartésienne

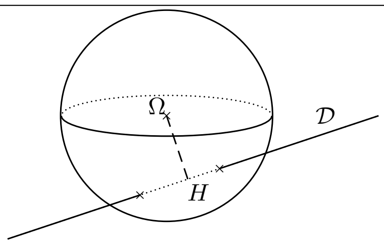
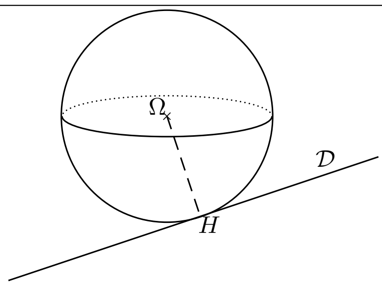
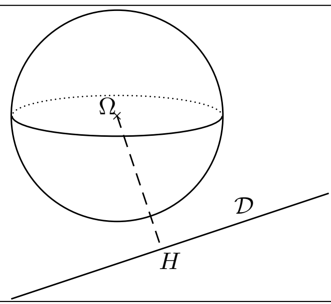
Définition.
Soit Ω un point de l'espace et r un réel strictement positif.
L'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$ est appelé ***sphère de centre*** Ω ***et de rayon*** r.

Propriété.
Une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon r est $(x-x_{\Omega})^2+(y-y_{\Omega})^2+(z-z_{\Omega})^2 = r^2$.

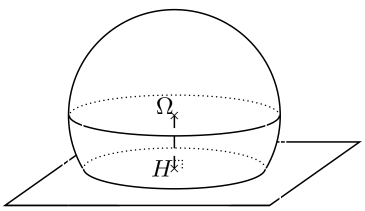
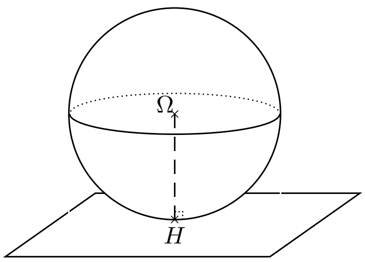
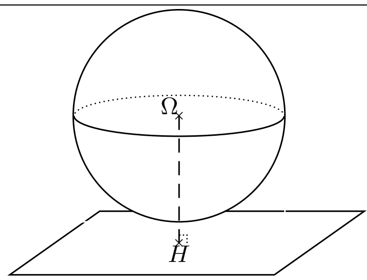
Exercice : soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-2=0$.
Justifier que $\mathcal{S}$ est une sphère, préciser son centre et son rayon.

2) Positions relatives ...

... d'une sphère de centre Ω et de rayon r et une droite $\mathcal{D}$:

sécantes		non sécantes
		
$d(\Omega,\mathcal{D})<r$	$d(\Omega,\mathcal{D})=r$	$d(\Omega,\mathcal{D})>r$
$\mathcal{S}\cap\mathcal{D}=\dots\dots\dots$	$\mathcal{S}\cap\mathcal{D}=\dots$ est un point La droite est ***tangente*** à la sphère.	$\mathcal{S}\cap\mathcal{D}=\emptyset$

... d'une sphère de centre Ω et de rayon r et un plan $\mathcal{P}$:

sécants		non sécants
		
$d(\Omega,\mathcal{P})<r$	$d(\Omega,\mathcal{P})=r$	$d(\Omega,\mathcal{P})>r$
$\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$ est un cercle le centre est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ le rayon est $\sqrt{r^2-d(\Omega,\mathcal{P})^2}$	$\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$ est un point Le plan est ***tangent*** à la sphère.	$\mathcal{S}\cap\mathcal{P}=\emptyset$

Exemple : soit la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(-4,1,5)$ et de rayon 7 et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y+2z-4=0$.

1. Déterminer la distance de Ω à $\mathcal{P}$. Que peut-on en conclure ?

2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.

3. Déterminer le rayon du cercle $\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$.