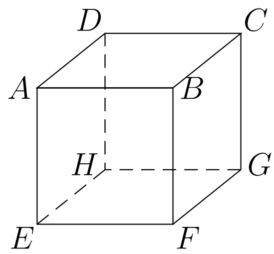
# Plans, droites et sphères dans l'espace.

## Exercice 1.




**1.** Sur le cube ci-contre, les droites $(BF)$ et $(CG)$ sont parallèles, ainsi que les droites .... et .....
Les droites $(DH)$ et $(BF)$ sont coplanaires, .... et .... aussi.
Les droites $(AE)$ et $(BC)$ sont non coplanaires, de même que .... et .....

**2.** La droite .... est sécante au plan .... au point .....
La droite $(CG)$ est contenue dans le plan $(BCF)$, de même, la droite ..... est contenue dans le plan ...... et la droite .... est strictement parallèle au plan .....

## Exercice 2.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan dans chacun des cas suivants :

**1.** plan passant par $A(1,1,1)$, $B(2,1,-1)$ et $C(1,0,1)$ ;

**2.** plan passant par $A(-2,1,-3)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

**3.** plan de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et qui passe par $A(0,-1,-3)$.

## Exercice 3.

Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$ ou $A(1,-4,2)$ et $B(-1,0,3)$.
*Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de $A$ et de $B$.*

## Exercice 4.

Déterminer dans chacun des cas suivants, un paramétrage et un système d'équations cartésiennes de la droite.

**1.** droite $(AB)$ avec $A(1,2,-3)$ et $B(0,-1,2)$ ;

**2.** droite passant par $C(3,1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

**3.** droite intersection des plans $\mathcal{P}_1 \ : \ 3x - y + z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ passant par $D(0,0,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

## Exercice 5.

Soient les plans $\mathcal{P}_1 \ : \ x - 2y - 2z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 \ : \ 2x + y - 2z + 2 = 0$.

**1.** Justifier que les deux plans sont sécants.

**2.** On note $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
Donner un point $A$ appartenant à $\mathcal{D}$, ainsi qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

## Exercice 6.

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par $\left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z - 3 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{array} \right.$.

**1.** Déterminer un paramétrage et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

**2.** Soit $A(1,-2,-1)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point $A$.

**3.** Soit $B(-2,7,0)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ parallèle à $\mathcal{D}$ contenant $A$ et $B$.

## Exercice 7.

Soient les droites suivantes :

$\mathcal{D}_1$ passant par le point $A(1,0,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 3t+4 \\ y = 2t+2 \\ z = -1 \end{array}\right. \qquad \mathcal{D}_3 : \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{array}\right.$

**1.** Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

**2.** Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont parallèles. Sont-elles confondues ?

## Exercice 8.

Déterminer la distance du point $M(1,2,-1)$ au plan $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1,1,0)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, puis au plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $4x-2y+z-5=0$.

## Exercice 9.

Soient deux points $M(1,1,1)$ et $A(1,6,3)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

**1.** Déterminer les coordonnées de $H$ projeté orthogonal de $M$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par $A$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

**2.** Déterminer les coordonnées de $H'$ projeté orthogonal de $M$ sur le plan contenant $A$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

## Exercice 10.

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct.

**1.** Soit $\mathcal{S} = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; x^2+y^2+z^2-x-5y-3z+6=0\}$.
Démontrer $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

**2.** Vérifier que $\mathcal{S}$ contient $A(0,1,1)$ et déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A$.

## Exercice 11.

On munit l'espace d'un repère orthonormal $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et pour tout $\lambda$ de $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_\lambda$ des points de coordonnées $(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+\lambda^2 = 2\lambda(x+y)$.

**1.** Déterminer la nature de $\mathcal{S}_\lambda$.

**2.** Donner en fonction de $\lambda$ la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}_\lambda$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z=1$.

* **3.** Démontrer qu'il existe deux plans, contenant chacun deux axes de coordonnées du repère $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ tangents à tous les ensembles $\mathcal{S}_\lambda$.

## Exercice 12.

**1.** Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2,3,0)$ et de rayon 10.

**2.** Déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite $(d)$ et la sphère $\mathcal{S}$ où $(d)$ a pour équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \end{array}\right.$.

## * Exercice 13.

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.
Soit $M$ un point de l'espace, de coordonnées $(x,y,z)$.
On cherche à démontrer la formule du cours qui donne la distance de $M$ au plan $\mathcal{P}$.
On note $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{P}$.

**1.** Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MH} = \lambda \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

**2.** En utilisant le fait que $H$ est dans le plan $\mathcal{P}$, déterminer l'expression de $\lambda$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$ et des coordonnées de $M$.

**3.** En déduire $\|\overrightarrow{MH}\|^2$ et conclure pour retrouver la formule du cours.