Convergence des suites numériques.

* Exercice 1.

1. Démontrer que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
En déduire que si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.

2. Justifier que si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge vers 0.

* Exercice 2.

Soit (u_n) une suite décroissante et minorée.

1. Justifier que $\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne inférieure, que l'on notera ℓ.

2. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 3.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont tous les termes sont non nuls.
Pour chacune des propositions suivantes, la démontrer si elle est juste, et donner un contre exemple sinon.

(a) Si $(u_n + v_n)$ converge vers 1, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

(b) Si (u_n) et (v_n) sont divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

(c) Si (u_n) et (v_n) convergent vers 0, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente.

(d) Si (v_n) converge vers 0 et que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge vers 0.

(e) Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente aussi.

(f) Si $(|u_n|)$ est convergente, alors (u_n) est convergente aussi.

(g) Si $(|u_n|)$ est divergente, alors (u_n) est divergente aussi.

Exercice 4.

Déterminer les limites des suites ci-dessous :

(a) $u_n = n\ln(n)$ **(b)** $u_n = \dfrac{7}{3-n^5}$ **(c)** $u_n = n^{-2} - 3n$ **(d)** $u_n = \dfrac{4-3n^5}{2n^3+n-4}$

(e) $u_n = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **(f)** $u_n = 3e^{-n}$ **(g)** $u_n = \sqrt{n^2+2n+1} - n$ **(h)** $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Exercice 5.

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
La suite est-elle monotone ? convergente ?

Exercice 6.

Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que (S_n) est monotone.

2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
En déduire que (S_n) est majorée.

3. Montrer que (S_n) est convergente et donner un majorant de sa limite.

Exercice 7.

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

2. À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu avec la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur $[0, 4]$.
Tracer également la droite d'équation $y = x$ et obtenir, par construction, des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_4.
Peut-on alors émettre une conjecture quant à la convergence de (u_n) ?

3. Démontrer que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

* Exercice 8.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1)$.

2. En utilisant aussi la formule $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, démontrer que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 9.

* **1.** Démontrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) est convergente également vers cette limite.

2. Soit (L_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

- **(a)** Démontrer que (L_{2n}) et (L_{2n+1}) sont adjacentes.
- **(b)** En déduire la nature de (L_n).

Exercice 10.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire la limite de (S_n) (*on pourra s'intéresser à sa monotonie*).