Convergence des suites numériques.

En 220 avant J.C., Archimède avait étudié deux suites qui permettaient d'obtenir une très bonne valeur approchée de π. De même, on peut construire une suite qui converge vers la racine carrée d'un nombre, et ainsi en obtenir une valeur approchée par des calculs successifs.

I. Convergence et divergence

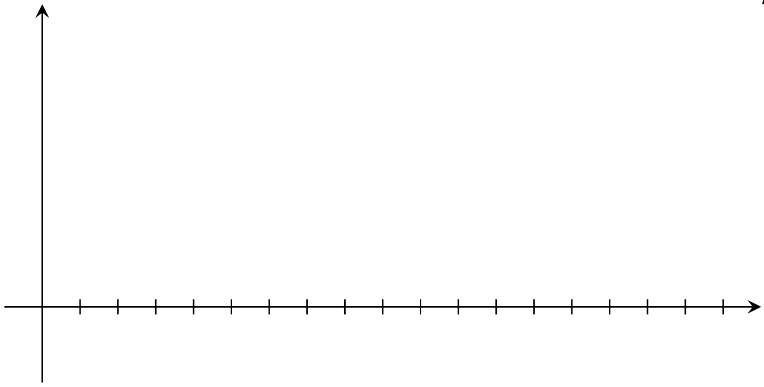
1) limites de suites

Définition : limite finie.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite ℓ (nombre fini) si, pour tout ε strictement positif, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note en ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.



Autre formulation :

Définition : limite infinie.

- ⋆ On dit que la suite (u_n) admet la limite $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A, ce que l'on peut écrire :

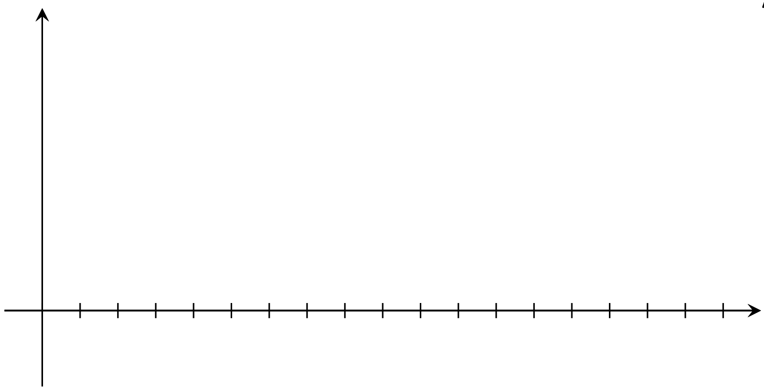
  $$\ldots$$

- ⋆ On dit que la suite (u_n) admet la limite $-\infty$ si ....

  ....

  $$\ldots$$

- ⋆ On note ces relations $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $u_n \to +\infty$) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ (ou $u_n \to -\infty$).



Autre formulation pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$:

Propriété.

Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Illustration :

Vocabulaire :

- $\star$ Une suite qui a une limite finie est appelée ***suite convergente***.
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (nombre fini) on dit que ***la suite*** (u_n) ***converge vers*** ℓ.
- $\star$ Une suite qui n'est pas convergente (limite infinie ou pas de limite) est ***divergente***.

2) propriétés des suites convergentes

Propriété.

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration :

Propriété.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ strictement positive, alors tous les termes de (u_n) sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Démonstration :

Propriété.

$$\text{Si } \begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ v \text{ converge vers } \ell' \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n (\text{ou } u_n \leqslant v_n) \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \ell \leqslant \ell'.$$

Illustration : dans le dessin ci-contre, pour tout n, $u_n < v_n$ et (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Propriété.

Si une suite (u_n) a une limite, alors toute suite extraite de (u_n) a la même limite.

Conséquence : si on trouve deux suites extraites qui ont des limites différentes, on peut affirmer que la suite principale diverge.

Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge.

II. Détermination de limites

1) limites usuelles

La définition de limite de suite étant l'analogue de la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$, toutes les méthodes vues pour les fonctions en $+\infty$ seront valables ici.

Limites usuelles déjà connues :

- n^a $(a > 0)$, $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n ont pour limite $+\infty$
- $\dfrac{1}{n^a}$ ou n^{-a} $(a > 0)$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0

Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ **:**

Théorème.

Soit q un nombre réel.

- $\boxed{\text{si } q > 1, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$
- $\boxed{\text{si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0}$
- si $q = 1$, alors pour tout n, $q^n = 1$
- $\boxed{\text{si } q \leqslant -1, \text{ alors } (q^n) \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$

Démonstration dans l'exercice 1.

2) opérations sur les limites

Les mêmes règles que sur les fonctions s'appliquent aux suites.

Somme :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

Produit :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$		0	$+\infty$	
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$						

Quotient :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	0	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$					

Exemples : pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{0{,}09^n}$ et $y_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{(-0{,}3)^n}$.

Propriété de composition par une fonction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et une suite (u_n) à valeurs dans I.
Alors, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ (avec ℓ et a des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n^2}$?

III. Existence de limites sans calcul explicite

1) par comparaison

Théorème de limite par encadrement (ou des gendarmes).

Soient u, v et x trois suites réelles, et ℓ un nombre réel.

- On suppose que u et v convergent vers la même limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$. Alors (x_n) converge vers ℓ.
- Si u converge vers 0 et que à partir d'un certain rang, $|x_n - \ell| \leqslant u_n$, alors ....

Exemples classiques : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ou $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

Théorème de divergence par comparaison.

Soient u et v deux suites réelles.

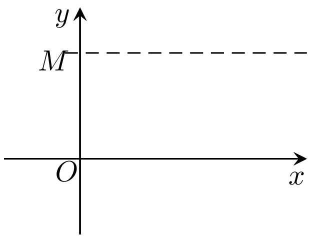
- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$ et à partir d'un certain rang, ...
  Alors (v_n) diverge (et a pour limite $+\infty$).
- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$ et à partir d'un certain rang, ...
  Alors (u_n) diverge (et a pour limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

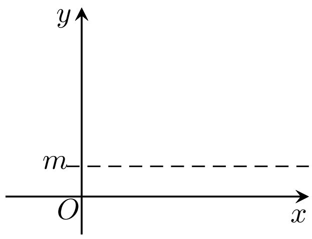
- Une suite ***croissante et majorée*** ....
- Une suite ***croissante et non majorée*** ....
- ....
- ....

Illustrations :

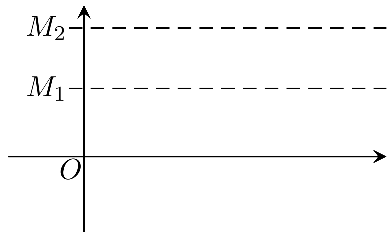
croissante majorée



décroissante minorée



croissante non majorée



Démonstration du cas « décroissante non minorée » :

Remarques : la limite n'est pas nécessairement le majorant ou le minorant : la limite est la borne supérieure (ou inférieure) des valeurs de la suite (voir démonstration exercice 2).
La suite peut n'être croissante (ou décroissante) que à partir d'un certain rang.

2) suites adjacentes

Propriété (conséquence de la limite monotone).

Soient u et v deux suites telles que :

- $\star$ u est croissante et v décroissante ;
- $\star$ pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Alors u et v sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration :

Définition.

Deux suites u et v sont dites ***adjacentes*** si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Propriété.

Deux suites adjacentes sont convergentes, vers la même limite.

De plus, si u et la suite croissante, v la suite décroissante, alors en notant ℓ la limite commune, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Exemple : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par leurs termes généraux : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.