Droites et cercles dans le plan.

La géométrie est au départ la science de la mesure de la terre, et elle se pratique sur le terrain. Les problèmes de partage de territoire occupent une place importante, du fait de leur importance dans les sociétés dont l'économie est essentiellement basée sur l'agriculture.

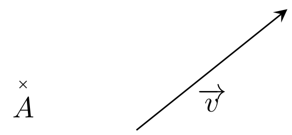
Les instruments de géométrie de l'époque sont alors la corde, et la règle (corde tendue, avec des nœuds à intervalles réguliers), les premières figures étudiées sont donc naturellement les cercles et les droites.

Ce n'est qu'à partir du XVIè siècle que le calcul littéral est formalisé, et ce sont René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (17è siècle) qui initieront l'usage systématique des coordonnées et de l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques.

I. Droites

Définition.

Soit A un point du plan, et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul.
On appelle ***droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$*** l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$.
Tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{v}$ est un ***vecteur normal*** à la droite.



Autres caractérisations possibles d'une droite :

- deux points : (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
- un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$: soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$, la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

1) Équations cartésienne et paramétrique

a. Équation cartésienne

Propriété.

Le plan est muni d'un repère $(0;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $(a,b)\neq(0,0)$, alors l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite.
Réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $ax+by+c=0$.
Une équation $ax+by+c=0$ est appelée ***équation cartésienne***.

Méthode pour obtenir une équation cartésienne de la droite (d) . . .

. . . passant par un point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$:

$$M\in(d)\iff[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{v}]=0\iff\begin{vmatrix}x-x_A & \alpha\\ y-y_A & \beta\end{vmatrix}=0\iff\dots\dots\dots\dots$$

$$\iff\dots\dots\dots\dots$$

. . . passant par un point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$:

$$M\in(d)\iff\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0\iff\dots\dots\dots\dots$$

$$\iff\dots\dots\dots\dots$$

Exemples : Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par $A(-3,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1=\begin{pmatrix}5\\ -7\end{pmatrix}$:

La droite d_2 a pour équation cartésienne $3x-2y+1=0$.
Elle passe par le point $B(1,\dots)$ car . . .
Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$, et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$.

Dans une équation cartésienne $ax+by+c=0$, $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Remarque : une équation cartésienne sous forme $ax+by+c=0$ regroupe les cas $y=mx+p$ pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, et $x=k$ pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Ces deux dernières équations sont appelées équations cartésiennes ***réduites***.

b. Système d'équations paramétriques

Propriété.

Un point $M(x,y)$ est sur la droite passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\end{cases}$
Un tel système est appelé ***système d'équations paramétriques*** de la droite.

Exemple : une droite $\mathcal{D}$ a pour équation paramétrique $\begin{cases}x=3t-2\\y=-27t+4\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
Elle passe par le point $A(\ldots,\ldots)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}=\ldots$.
Déterminons une équation cartésienne :

Dans une équation paramétrique $\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

c. Lien direct entre ces deux types d'équations

⋆ D'une équation cartésienne vers une équation paramétrique : exprimer une coordonnée en fonction de l'autre, qui servira alors de paramètre.

Par exemple, de l'équation $2x-3y+6=0$ on obtient .... puis $y=$ ....

Ainsi, on obtient le système d'équations $\begin{cases}x=t\\y=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

⋆ D'une équation paramétrique vers une équation cartésienne : isoler le paramètre dans une équation et le remplacer dans la deuxième.

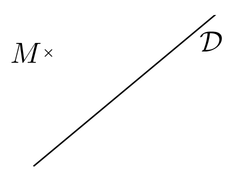
Par exemple, $\begin{cases}x=2t-4\\y=-t+3\end{cases}\iff\begin{cases}\ldots\\\ldots\end{cases}\iff\begin{cases}\ldots\\\ldots\end{cases}$

Une équation cartésienne est donc ....

2) Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite

Définition.

Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite, on appelle ***projeté orthogonal de** M **sur** $\mathcal{D}$* le point H tel que :
⋆ H appartient à $\mathcal{D}$
⋆ les droites (MH) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.
La distance entre M et la droite $\mathcal{D}$, notée $d(M,\mathcal{D})$ est MH.



Trouver les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$:

(x_H, y_H) est solution du système donné par $\begin{cases} \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{v} = 0 & (MH) \textit{ et } \mathcal{D} \textit{ sont perpendiculaires} \\ ax_H + by_H + c = 0 & H \textit{ appartient à } \mathcal{D} \end{cases}$

Exemple : soit le point $M(-2,-1)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 4y - 2 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$, que l'on appellera H.

Remarque : la distance entre M et son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$ est la plus petite distance entre M et un point de $\mathcal{D}$, en effet, si A est un autre point de $\mathcal{D}$,

Propriété.

La distance du point $M(x_M, y_M)$ à la droite $\mathcal{D}$ dont l'équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Démonstration : voir **DM n° 11**.

Exemple : distance de $M(-2,-1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 4y + 7 = 0$.

II. Cercles

Définition.

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ un point du plan, et r un nombre positif.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = r$.

1) Équation cartésienne

Propriété.

- Une ***équation cartésienne*** d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon r est :
  $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.
  Dans le plan complexe, cela se traduit par $|z - z_\Omega|^2 = r^2$.
- Une ***équation cartésienne*** d'un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Justifications :

Exemple : justifier que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$ est l'équation d'un cercle et en déterminer son centre et son rayon.

Attention, les équations de ce type ne sont pas toujours des équations de cercle.

2) Représentation paramétrique

Propriété.

Une ***représentation paramétrique*** du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon r est donnée par :

$$\begin{cases} x = r\cos(t) + x_\Omega \\ y = r\sin(t) + y_\Omega \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Exemple : représentation paramétrique du cercle de centre $(1, -\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

III. Intersection d'un cercle avec une droite

Propriété.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon r et de centre Ω, et soit $\mathcal{D}$ une droite.

$\star$ ....

$\star$ ....

$\star$ ....

Illustrations :