Géométrie vectorielle

Exercice 1.

Construire un parallélogramme $ABCD$, placer les points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, et O le point d'intersection de (IK) et (JL).
Compléter par lecture graphique :

1. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{AO}$

2. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AO}$

3. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO} = \ldots = \ldots$

4. $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{\ldots O} = \overrightarrow{LI}$

5. $\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{OJ} = \ldots$

6. $\ldots + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{KB}$

Exercice 2.

Soit $ABCD$ un losange avec $AC = 4$ et $BD = 2$, et Ω son centre.
Soit I le point tel que $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1. Placer le point I sur la figure.

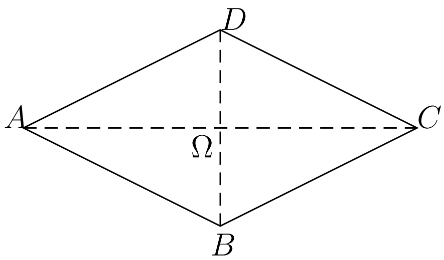
2. Dans le repère $\mathcal{R}_1 = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées cartésiennes

(a) des points A, B, C, D, Ω et I ;

(b) du vecteur $\overrightarrow{ID}$;

(c) du milieu du segment $[DC]$

3. Justifier que le repère $\mathcal{R}_2 = (\Omega, \overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega D})$ est orthonormé.
En utilisant les coordonnées dans ce repère, calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ID}$.



Exercice 3.

Soit ABC un triangle non aplati et I le milieu de $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AC})$ est liée.

Exercice 4.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.
Déterminer les couples de coordonnées polaires de A et B.
Les points C et D ont pour coordonnées polaires respectivement $(2, \frac{\pi}{6})$ et $(7, -\pi)$.
Déterminer leurs coordonnées cartésiennes.

Exercice 5.

Soit ABC un triangle non aplati.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 6.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 7.

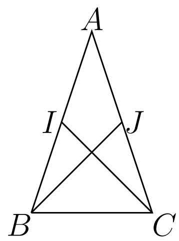
Dans le plan muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on définit trois vecteurs :
$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w} = \frac{4}{5}\overrightarrow{i} + \frac{3}{5}\overrightarrow{j}$.

1. Vérifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée.

2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans cette base.

Exercice 8.

Une structure métallique est représentée ci-contre. Elle est constituée de deux barres $[AB]$ et $[AC]$ de 15 mètres de long chacune. I et J désignant les milieux de ces barres, cette structure est conçue de sorte que $[BJ]$ et $[CI]$ soient perpendiculaires.



1. Déterminer une valeur approchée en degrés de la mesure de l'angle non orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Quelle est la valeur exacte de lécartement BC de la base de cette structure ?
on rappelle que $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exercice 9.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1;2)$, $B(3;4)$ et $C(4;0)$.

1. Déterminer des valeurs approchées des angles du triangle ABC.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 10.

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Exercice 11.

Déterminer le réel μ tel que les trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix}$ soient coplanaires.

Exercice 12.

On donne $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et tel que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ soient coplanaires.

Exercice 13.

Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs, et $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{i}.\overrightarrow{k})\overrightarrow{j} - (\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j})\overrightarrow{k}$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{i}$ sont orthogonaux.

Exercice 14.

Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs de l'espace.
Montrer que $\left[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}\right] = 0$.

* Exercice 15.

Une molécule de méthane (CH_4) est constituée par quatre atomes d'hydrogènes qui sont les sommets A, B, C et D d'un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que $AB = AC = AD = BC = CD = DB$, on prendra comme unité de longueur cette arête commune) et d'un atome de carbone situé au point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ et en déduire que deux arêtes non sécantes de $ABCD$ sont orthogonales.

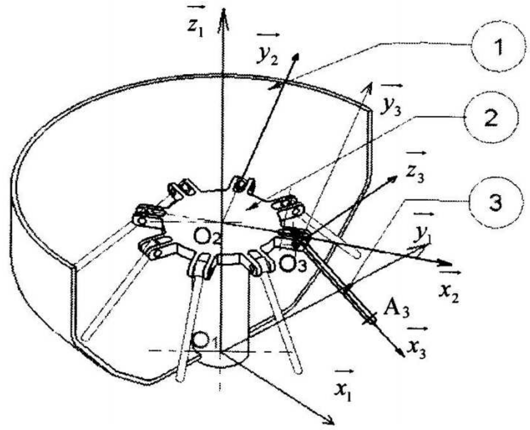
2. **(a)** Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

(b) En déduire que $AG = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

(c) Que peut-on dire de BG, CG et DG ?

3. Démontrer que $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{8}$ et en déduire que $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right) \approx 109°$.

Exercice 16.



Une centrifugeuse de laboratoire est constituée d'un carter 1 en forme de bol, d'un rotor 2 auquel sont fixées des éprouvettes 3.
Les éprouvettes contiennent chacune deux liquides de masse volumique différente. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du rotor 2, les éprouvettes 3 s'inclinent et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond des éprouvettes, ce qui réalise la séparation des deux liquides.
Le repère $\mathcal{R}_1(0_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est associé au carter 1.
Le rotor 2 a un mouvement de rotation d'axe $(O_1, \overrightarrow{z_1})$ par rapport au carter 1.
On définit le repère $\mathcal{R}_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ associé au rotor 2, $\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ et $\overrightarrow{O_1O_2} = h\overrightarrow{z_1}$.
L'éprouvette 3 a un mouvement de rotation d'axe $(O_3, \overrightarrow{y_3})$ par rapport au rotor 2.
On définit le repère $\mathcal{R}_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ associé à l'éprouvette 3, $\beta = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$, $\overrightarrow{O_2O_3} = R.\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{O_3A_3} = \ell\overrightarrow{x_3}$.

1. Réaliser les figures planes illustrant les 2 paramètres d'orientation α et β.

2. Déterminer les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$; $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3}$ et $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_3}$.