Géométrie vectorielle

Les vecteurs représentent des grandeurs physiques comme des forces, des vitesses, des champs (magnétiques, gravitationnels ...), qui ont nécessité la mise en place des repères.
En mathématiques, ils sont le fondement de l'algèbre linéaire, qui étudie les espaces vectoriels que nous verrons au 2ème semestre.
L'algèbre linéaire fait le lien entre des problèmes algébriques (systèmes d'équations par exemple) et des problèmes géométriques (intersections de droites, transformations du plan ...), grâce notamment aux repères et coordonnées.

I. Introduction : vecteurs (rappels).

Un vecteur traduit un déplacement : il est caractérisé par : sa direction, son sens, et sa longueur.

Exemple : Si A et B sont deux points distincts, on peut former un vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec pour caractéristiques : la direction de la droite (AB), le sens de A vers B, et la longueur AB.
La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa ***norme***, et on peut noter $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définitions.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si :
$\star$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
OU $\star$ il existe deux réels α et β non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Autrement dit, soit l'un des deux vecteurs est nul, soit ils ont la même direction.

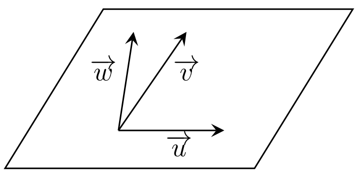
Exemples :

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur, en effet : ...

Définition.

Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si :
$\star$ il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w} + k'\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{v}$.
OU $\star$ il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Illustration :



Définition (complément).

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, autrement dit : ....
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas coplanaires : ....

Remarque : une famille qui n'est pas libre est dite ***liée***.

II. Repérage

1) Bases, orientation

Définition.

Une ***base*** du plan $\mathcal{P}$ est un couple de deux vecteurs non colinéaires.
Dans l'espace, une ***base*** est un triplet de trois vecteurs non coplanaires.
En général une base du plan est notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et une base de l'espace $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Théorème.

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ étant une base du plan $\mathcal{P}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$.
Le couple (x, y) est unique et est appelé ***couple de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ étant une base de l'espace $\mathcal{E}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$, c'est-à-dire qu'il existe trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$.
Le triplet (x, y, z) est unique et est appelé ***triplet de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Orientation. Le plan est en général orienté suivant le sens trigonométrique (sens anti-horaire).
Dans l'espace, on peut orienter un plan $\mathcal{P}$ suivant un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui n'est pas dans le plan : le vecteur $\overrightarrow{u}$ pointe vers le demi-espace d'observation de $\mathcal{P}$, et vu de ce demi-espace, on oriente $\mathcal{P}$ dans le sens trigonométrique.

Différents types de bases :

- $\star$ La base du plan est dite ***orthogonale*** si la mesure principale de l'angle non orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est $\frac{\pi}{2}$.
  Dans l'espace, les trois angles non orientés $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$ doivent mesurer $\frac{\pi}{2}$
- $\star$ La base est dite ***orthonormale*** (ou ***orthonormée***) si elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont de norme 1.
- $\star$ La base est dite ***directe*** si la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (orienté par $\overrightarrow{k}$ dans l'espace) est positive (autrement dit, une mesure de l'angle orienté est entre 0 et π).

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base du plan car ....
On note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Repères

Définition.

Un ***repère cartésien*** est la donnée d'un point et d'une base.
Un repère est qualifié de direct, orthogonal, orthonormal ... si sa base l'est.

Définition.

Soit $\mathcal{R}$ un repère du plan (resp. de l'espace) $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$).
Les ***coordonnées cartésiennes*** d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (respectivement $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) :

⋆ si M est un point du plan, M a pour coordonnées (x, y) signifie que $\overrightarrow{OM} = \dots$

⋆ si M est un point de l'espace, M a pour coordonnées (x, y, z) signifie que $\overrightarrow{OM} = \dots$

Remarques :

- L'existence et l'unicité de ces coordonnées sont assurées par le théorème précédent.
- On peut ainsi identifier un point du plan à ses coordonnées dans $\mathbb{R}^2$, autrement dit il existe une ***bijection*** entre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}^2$ (de même, il y a une ***bijection*** entre $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}^3$).

Propriété.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B), et soit k dans $\mathbb{R}$.

- Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Même chose dans l'espace avec trois coordonnées.

Théorème.

Dans un repère orthonormé, la ***norme*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui correspond à la distance AB est donnée par la formule :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ dans le plan ;}$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \text{ dans l'espace.}$$

Exemple : soient $A(3; -1)$ et $B(2; 5)$ dans un repère orthonormé, on note I le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} =$ et $\|\overrightarrow{AB}\| =$

les coordonnées de I sont ....

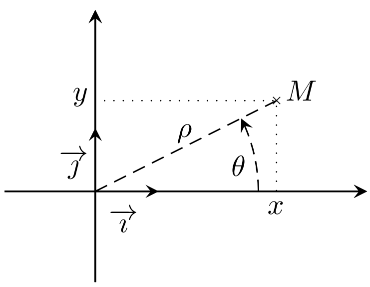
3) Coordonnées polaires dans le plan

Définition.

Soit $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct.

- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan non nul, on note $\rho = \|\overrightarrow{u}\|$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u})$.
  Alors (ρ, θ) est le couple de ***coordonnées polaires*** de $\overrightarrow{u}$.
- Soit M un point du plan distinct de O, on note $\rho = OM$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
  Alors (ρ, θ) est le couple de ***coordonnées polaires*** de M.

Dans les deux cas, ρ est appelé ***rayon polaire*** et θ ***angle polaire***.



Propriété.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Soit M un point distinct de O (ou $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul) de coordonnées cartésiennes x et y dans $\mathcal{R}$, et de coordonnées polaires (ρ, θ). Alors $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

Exemple : déterminons les coordonnées polaires de A qui a pour coordonnées cartésiennes : -2 et $2\sqrt{3}$.

4) Coordonnées cylindriques dans l'espace

Définition.

Soient $\mathcal{R}$ un repère orthonormal direct de l'espace, et M un point de l'espace de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On note N le projeté orthogonal de M dans le plan (xOy), et (ρ, θ) les coordonnées polaires de N. Alors le triplet (ρ, θ, z) est le triplet des ***coordonnées cylindriques*** de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Exemple : dans un repère $\mathcal{R}$, le point M a pour coordonnées cylindriques $(3, -\frac{\pi}{4}, -2)$, quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

III. Produit scalaire

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, du plan ou de l'espace.
On note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le ***produit scalaire*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls ;} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

Remarque : par analogie au produit numérique, on note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace :

- $\star$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est aigü, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est obtus.
- $\star$ $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
- $\star$ $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ soit $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit scalaire est

- $\star$ symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- $\star$ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$;
  $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
  pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et tout réel λ, $(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v})$.

En particulier : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Remarque : on peut déduire les « identités remarquables » suivantes :
$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 =$ $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) =$

3) Expression du produit scalaire avec les coordonnées

Théorème.

⋆ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$.

⋆ Dans l'espace, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$.

(Le résultat ne dépend pas de la base choisie, mais elle doit être orthonormale.)

Exemple : déterminer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$, en déduire l'angle non orienté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Méthode : pour déterminer l'angle non-orienté θ entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées, on peut calculer le produit scalaire, puis utiliser la formule $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}}$.

IV. Déterminant dans le plan

Définition.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan orienté.
On note $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ le ***déterminant*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\begin{cases} [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls}\,; \\ [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = 0$.

Remarque : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \pm\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est

⋆ anti-symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, ...

...

...

Exemple : $[(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}); (-\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v})] = \dots$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots [\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}]$$

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

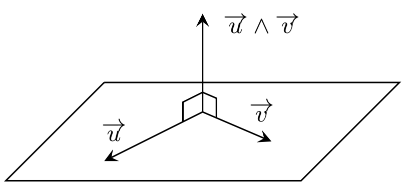
Alors $\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = xy' - yx'}$ (ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$).

Exemple : calculer produit scalaire et déterminant de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et en déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Méthode : on peut déterminer l'angle orienté θ entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées : on calcule le produit scalaire, qui donne l'angle au signe près, et le signe est donné par le signe du déterminant.

V. Produit vectoriel et déterminant dans l'espace (produit mixte)

1) Produit vectoriel



Le produit vectoriel dans l'espace est une opération entre deux vecteurs qui a pour résultat un autre vecteur.

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

On note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le ***produit vectoriel*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le vecteur défini ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ ne sont pas colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \text{ est le vecteur} \\ \qquad \text{de norme } \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ \qquad \text{orthogonal à } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \\ \qquad \text{de sens tel que } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \text{ soit une base directe.} \end{cases}$$

a. Interprétations géométriques

Conséquences de la définition : $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$.

Et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

Remarques :

⋆ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ représente ...

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est ...

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors ...

⋆ si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \ldots$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \ldots$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \ldots$.

b. Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit vectoriel est

⋆ .... : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \ldots$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ...

...

...

Exemple : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, on pose : $\vec{u} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 7\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$.
Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

c. Expression du produit vectoriel avec les coordonnées

Théorème : expression du produit vectoriel avec les coordonnées.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, autrement dit $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Exemple : dans une base orthonormée, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'ils sont orthogonaux, et déterminons un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale directe.

2) Déterminant dans l'espace ou produit mixte

Définition.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ le ***produit mixte*** (ou ***déterminant***) des trois vecteurs, c'est le nombre défini par $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$.

a. Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

En effet,

b. Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit mixte est

⋆ antisymétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a ....

....

⋆ trilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{x}$,

....

....

....

....

c. Expression du produit mixte avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$. Ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Méthode pratique de calcul : règle de Sarrus.

Comptés positivement : $\left|\begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}$. Comptés négativement : $\left|\begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}$.

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?