Généralités sur les suites numériques.

Les suites numériques sont des successions de nombres numérotés (indexés par des entiers).
Elles apparaissent donc naturellement dans l'étude d'un phénomène qui évolue avec un intervalle de temps régulier : mathématiques financières et économie (évolution d'un capital placé avec intérêts, emprunt ...), mais aussi en biologie (évolution d'un population ...), ou en physique avec un pas de temps discret (jours, heures, années ...).

I. Qu'est-ce qu'une suite ?

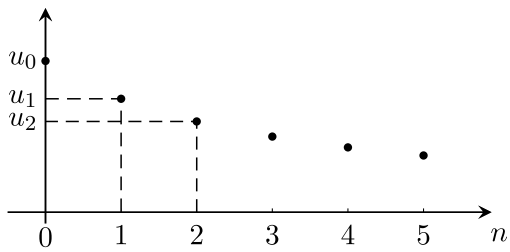
Définitions.

Une suite numérique u associe à tout nombre entier n un nombre réel noté u_n. (se lit « u- enne »)
C'est donc une ***application de*** $\mathbb{N}$ ***dans*** $\mathbb{R}$. Autrement dit $\begin{array}{cccc} u : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u_n \end{array}$.

Une suite est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
u_n est le ***terme de rang*** n (ou d'indice n) de la suite (u_n) : n est un nombre entier positif, u_n est un nombre réel.
L'ensemble des suites réelles se note en général $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Attention : il ne faut pas confondre un terme (par exemple u_3) et son rang (ici 3). Pour cela on peut visualiser la suite dans un tableau, ou sur un graphique :

rangs n	0	1	2	3	...	n	$n+1$	...
termes u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...



Exemples de suites :

- la suite (w_n) est définie par $w_n = 4n - 7$:

  $w_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- si $v_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 7$:

  $v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- on appelle p_n la probabilité de piocher une boule blanche dans une boîte qui contient 2 boules blanches et n boules vertes, toutes identiques au toucher :

  $p_0 = 1, \quad p_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- on place 100 euros sur un compte à intérêts composés à 3% par an. On appelle (c_n) la suite des capitaux sur le compte à la fin de chaque année, ainsi :

  $c_0 = 100, \quad c_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- un escargot est au pied d'un arbre, et avance de 20 centimètres par jour, on note d_n la distance entre l'escargot et l'arbre au bout de n jours :

  $d_0 = 0, \quad d_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1) Construction d'une suite

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite :

⋆ **de manière explicite,** par son terme général : on connaît une formule pour calculer chaque terme u_n.

Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3n-1}{n^2+1}$.

$u_0 =$ $u_7 =$

$u_1 =$ $u_{12} =$

C'est le cas de certaines suites étudiées ci-dessus : ....

⋆ **par récurrence :** on donne son premier terme et une formule pour passer d'un terme au suivant.

Par exemple : la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (u_n + 2)^2 \end{cases}$.

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du terme précédent, donc si nous voulions calculer u_7 nous serions obligés de calculer tous les termes intermédiaires : u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

$u_0 =$ $u_2 =$

$u_1 =$ $u_3 =$

....

⋆ **de manière implicite :** u_n est l'unique solution d'une équation dépendant de n.

Par exemple on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont chaque terme u_n est l'unique solution positive de l'équation $x^n - 1024 = 0$.

$u_1 =$ ....

Attention, bien vérifier l'existence et l'unicité de la solution pour que la suite soit correctement définie.

2) Opérations sur les suites

a. Opérations

Définition.

- La ***somme*** de deux suites (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $u_n + v_n$:
$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$
- Le ***produit*** de la suite (u_n) ***par un réel*** λ est la suite de terme général λu_n :
$$\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$$
- Le ***produit*** des suites (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $u_n \times v_n$:
$$(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$$

Exemple : on définit les suites (u_n) et (v_n) par leurs termes généraux : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}n^2$ et $v_n = -n^2+3n+2$.

Le terme général de la suite $4(u_n) + (v_n)$ est ....

b. Extraction

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

On remarque que, si n est pair, $u_n = \ldots$ et si n impair, $u_n = \ldots$.

On peut extraire de la suite (u_n) une suite que l'on appellera (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$, ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \ldots$.

$v_1 = u_{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$ $v_2 = \ldots\ldots$ $v_3 = \ldots\ldots$

rangs	n	0	1	2	3	4	5	6	...
termes	u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	...
termes	$v_n = u_{2n}$	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5		...

Définition.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que (v_n) ***est extraite de*** (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

On peut noter $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$.

Suite de l'exemple : la suite (v_n) précédente est la suite $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi(n) = \ldots$.

II. Monotonie, majorants, minorants

Définition.

Soit (u_n) une suite réelle :

⋆ on dit que la suite est ***croissante*** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

⋆ on dit que la suite est ***décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}$, ...

⋆ on dit que la suite est ***constante*** ou ***stationnaire*** si $\forall n \in \mathbb{N}$, ...

⋆ une suite est dite ***monotone*** si elle est croissante, ou si elle est décroissante.

Remarque : si on peut mettre une inégalité stricte ($<$ ou $>$) au lieu d'une inégalité large ($\leqslant$ ou $\geqslant$) alors la suite est ***strictement croissante*** ou ***strictement décroissante***. On parle alors de ***stricte monotonie***.

Méthode : pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), il y a plusieurs possibilités.

- Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe :

- Si tous les termes sont strictement positifs, calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 :

- Par récurrence (dans le cas de suites définies par une relation de récurrence, notée ici $u_{n+1} = f(u_n)$) :
  Pour montrer que (u_n) est décroissante, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$

  Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété ....

  Initialisation : on montre que ....

  Hérédité : ....

  ....

  ....

  On sait que ...

  Conclusion :

Remarque importante : Pour calculer u_{n+1}, on remplace tous les n par $(n+1)$ dans l'expression de u_n, de même, pour exprimer u_{k+2} on remplace tous les n par $(k+2)$ ...

Exemples :

⋆ suite (u_n) définie par $u_n = 4n - 7$:

⋆ suite (v_n) définie par $v_n = 3 \times \dfrac{1}{2^n}$:

⋆ (w_n) définie par $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = w_n - 2$:

⋆ (z_n) est définie par $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = e^{z_n} + 3n - 4$.

⋆ (a_n) définie pour tout n par $a_n = (-3)^n$:

Définition.

⋆ la suite (u_n) est ***majorée*** si ....

⋆ la suite (u_n) est ***minorée*** si ....

⋆ la suite (u_n) est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire

Exemple : $u_n = 2 - n^2$:

Propriété.

Une suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

En effet,

III. Suites usuelles

1) Suites arithmétiques

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre.

Définition.
(u_n) est une suite arithmétique si il existe un nombre réel r tel que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$.
Le nombre r est appelé ***raison*** de la suite arithmétique.

Exemples :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{5}$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$ est une suite arithmétique de raison ....
- la suite définie par $u_5 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 1$ est une suite arithmétique de raison .....
- la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 4$ est-elle arithmétique ?

  $u_0 =$.........................., $u_1 =$.........................., $u_2 =$..........................

  on *dirait* que (u_n) est arithmétique de raison ..., *prouvons*-le : $u_{n+1} =$ ....

  $=$ ....

  $=$ ....

  $=$ ....

  Donc (u_n) est arithmétique de raison ....
- la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 1$ est-elle arithmétique ?

  $u_0 =$.........................., $u_1 =$.........................., $u_2 =$..........................
  pour passer de u_0 à u_1, on ajoute ..., mais pour passer de u_1 à u_2 on ajoute ..., donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

a. Terme général d'une suite arithmétique de raison r.

Théorème.
La suite arithmétique (u_n) de raison r a pour terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Et aussi : $u_n = u_1 + (n-1)r$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.

Démonstration : récurrence.

Exemples : soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2 :
$u_{43} =$............................, et le terme général de (u_n) est : $u_n =$............................

(v_n) est la suite arithmétique vérifiant $v_5 = 3$ et de raison -1 :

b. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, le terme général est donné par $u_n = \dots$

Calculons la somme des $n+1$ premiers termes, $\sum_{k=0}^{n} u_k$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + \quad u_1 \quad + \quad u_2 \quad + \quad \dots \quad + \quad u_n \\ &= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \quad \dots \quad + u_0 + nr \\ &= (\dots\dots)u_0 + r \times (\dots\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut aussi transformer le résultat obtenu :

$$(n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} =$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$, ce qui se généralise en :

$$\boxed{\text{somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}}.$$

Ainsi, si on commence à u_1 : $\sum_{k=1}^{n} u_k = n\frac{u_1+u_n}{2}$.

Et la somme des termes consécutifs des rangs p à n est $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$.

Exemples :

$\star$ $\sum_{k=1}^{11} 7k\,?$

$\star$ soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.

$$\sum_{k=0}^{7} u_k =$$
$$=$$

$$\sum_{k=4}^{9} u_k =$$

2) Suites géométriques

Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre.

Définition.

(u_n) est une suite géométrique si il existe un nombre réel q tel que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n}$.
Le nombre q est appelé ***raison*** de la suite géométrique.

Exemples :

- la suite définie par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = 3u_n$ est géométrique de raison .....
- la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n = (\ldots) \times u_n$ est une suite géométrique de raison ...
- la suite (u_n) définie par $u_n = 2 \times 3^n$ est-elle géométrique ?

  $u_0 =$..........................., $u_1 =$..........................., $u_2 =$............................

  on *dirait* que (u_n) est géométrique de raison ..., *prouvons*-le : $u_{n+1} =$ ....

  $=$ ....

  $=$ ....

  Donc (u_n) est géométrique de raison ....

- la suite (u_n) définie par $u_n = 3^n \times (n+1)$ est-elle géométrique ?

  $u_0 =$..........................., $u_1 =$..........................., $u_2 =$............................

  pour passer de u_0 à u_1, ... et pour passer de u_1 à u_2, ...
  Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

a. Terme général d'une suite géométrique de raison q.

Théorème.

La suite géométrique (u_n) de raison q a pour terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Et aussi : $u_n = u_1 \ldots\ldots$ et $u_n = u_p \ldots\ldots.$

Démonstration : par récurrence.

Exemples : soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 2 :
$u_7 =$.., et le terme général de (u_n) est : $u_n =$................

(v_n) est la suite géométrique vérifiant $v_4 = 18$ et de raison -3 :

b. Somme de termes consécutifs.

(u_n) est une suite géométrique de raison q, le terme général est $u_n = \dots$

Calculons la somme de $n+1$ premiers termes, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ u_1 \ + \ \ u_2 \ \ + \ \ \dots \ + \ \ u_n$$

$$=$$

$$= u_0\Big(\dots$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, ce qui se généralise en :

$$\boxed{\text{somme de termes consécutifs d'une suite géométrique} = \text{1er terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$$

Si on veut commencer la sommation à u_1, on a de la même façon $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$.

Et la somme des termes consécutifs des rangs p à n est $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Exemples :

3) Quelques compléments sur les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$

De telles suites sont des suites définies par une relation de récurrence. Dans le cas où la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut s'assurer que la suite est bien définie.
Par exemple, qu'en est-il de la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n} - 1$?

Exemple : la suite (u_n) est donnée par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \in [0, 4]$.