Applications linéaires B.

Exercice 1.

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z)$

Exercice 2.

1. Donner la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:
$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$
$g(x, y, z) = (2x - y, 5x - 3y + z)$
$h(x, y, z) = (x - 5y - z, -x + y, 2z)$

2. On note ψ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\psi = f \circ g \circ h$.
Donner la matrice de ψ dans les bases canoniques, puis son expression.

Exercice 3.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\phi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

1. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

2. En déduire $\mathrm{Im}(\phi)$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'expression de $f\big((x, y, z)\big)$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel dont on note une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $\mathcal{B}'$ la famille $(e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$ et on admet que $\mathcal{B}'$ est aussi une base de E.

1. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. On notera P cette matrice.

2. Soit $x \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2, -1, 4)$.
Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit ϕ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice M' de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 6.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans à cette base.

Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
Soient $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (0,1,0)$, $\vec{w} = (1,0,0)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 8.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ u(x,y,z) = (x+y, 7x-y-8z, -x+y+2z).$$

1. Démontrer que u est linéaire et écrire la matrice A, représentative de u dans la base canonique.

2. **(a)** Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur e_1 d'abscisse 1.

(b) Démontrer que $e_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et donner un antécédent e_2 de e_1 par u.
En déduire que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

3. Compléter la famille (e_1, e_2) en une base $\mathcal{B}$ de façon à ce que la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$ soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Quel est le lien entre A et T ? Vérifier à la calculatrice.

Exercice 9.

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 3z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$.
On admet que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de F et une base de G.
On note $\mathcal{E}' = (u_1, u_2, u_3)$ la base obtenue par recollement de la base de F et de la base de G.

2. Déterminer la matrice A' du projecteur sur F parallèlement à G dans la base $\mathcal{E}'$.
En déduire la matrice A de ce projecteur dans la base canonique.

3. Procéder de même pour trouver la matrice B de la symétrie par rapport à F de direction G dans la base canonique.

Exercice 10.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y; -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)$.

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. On a vu dans le chapitre précédent que f était le projecteur sur la droite dirigée par $u = (2,-1)$ parallèlement à la droite dirigée par $v = (1,1)$.
Donner (sans calcul) la matrice A' de f dans la base (u,v).
Lien entre A et A' ?