Applications linéaires B.

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, une base est $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, une base est $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

I. Matrice d'une application linéaire et application linéaire associée à une matrice

1) Matrice d'une application linéaire

Si f est une application linéaire de E dans F, alors f est entièrement définie par $f(u_1)$, $f(u_2)$, …et $f(u_p)$.
Ces vecteurs sont dans F, on peut donc les décomposer dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots + a_{n,1}v_n \\ f(u_2) &= a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 + \dots + a_{n,2}v_n \\ &\vdots \\ f(u_p) &= a_{1,p}v_1 + a_{2,p}v_2 + \dots + a_{n,p}v_n. \end{aligned}$$

Définition.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ la matrice A de terme général $a_{i,j}$ qui est la i-ème coordonnée de $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{F}$.

$$\text{Ainsi, } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ et } A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \\ \dots & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} v_1 \\ \\ v_i \\ \\ v_n \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} f(u_1) & & f(u_j) & & & f(u_n) \end{array} & \end{array}$$

Méthode : pour déterminer la matrice d'une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:

1. calculer tous les $f(u_j)$ où les u_j sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$
2. exprimer chacune de ses vecteurs dans la base $\mathcal{B}_F$
3. mettre les coordonnées en colonne dans la matrice.

Exemples :

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-3y; 4x; x-y) \end{array} \right.$ on cherche la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ (notée $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$) et $\mathbb{R}^3$ (notée $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3)$).

  $f(u_1) = f((1,0)) = (2;4;1) = 2(1,0,0) + 4(0,1,0) + 1(0,0,1) = 2v_1 + 4v_2 + 1v_3$
  $f(u_2) = f((0,1)) = (-3,0,-1) = -3v_1 + 0v_2 - 1v_3$

  Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$.

  On cherche A, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$.
  $f(1) = 0$
  $f(X) = 1 = 1 + 0X + 0X^2 + 0X^3$
  $f(X^2) = 2X$
  $f(X^3) = 3X^2$

  Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$.
Pour tout x de E, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$.
On note $y = f(x)$, et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$.
Alors $\boxed{Y = AX}$.

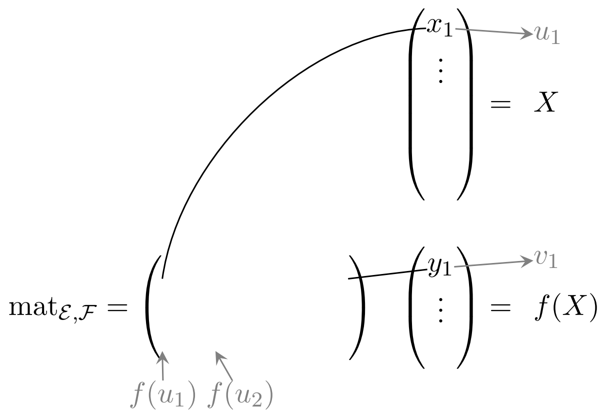
Exemple : avec l'application f précédente : $P \mapsto P'$.
Soit $P = 3 + X - X^2 + 2X^3$, on note U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$: $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Alors $AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

On retrouve bien $f(P) = 1 - 2X + 6X^2$.

Bilan :

E de base $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$
F de base $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$
$f \in \mathcal{L}(E, F)$.
$x = \sum_{k=1}^{p} x_k u_k$
$f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k$



2) Application linéaire associée à une matrice

Propriété.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n dans lesquels on fixe deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Alors l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.
Donc en particulier $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = n \times p$.

Conséquence, avec des bases fixées, on peut associer à toute matrice, une unique application linéaire.

Définition.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle ***application linéaire canoniquement associée à*** A, l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminons l'application linéaire canoniquement associée à A que l'on notera f.
A a 2 lignes et 3 colonnes donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
Alors, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :
$f(e_1) = (2, -1)$, $f(e_2) = (1, 0)$ et $f(e_3) = (3, 4)$.
Or $f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$
$\quad = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$
Donc $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, -x + 4z)$.

3) Opérations sur les matrices et les applications linéaires

Les opérations sur les matrices sont compatibles avec les opérations sur les applications linéaires :

Propriété.
- Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E, F)$, et leurs matrices dans les mêmes bases sont A et B, alors la matrice de $f + g$ est $A + B$ et la matrice de λf et λA. (*linéarité de l'application* φ)
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, avec $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de E, F et G.
  Alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$. *attention à l'ordre des bases !*

Justification du deuxième • : Soit $x \in E$, on note $y = f(x)$ et $z = g(y)$ soit $z = g \circ f(x)$.
X (respectivement Y, Z) est la matrice colonne des coordonnées de x (respectivement y, z) dans la base $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$).
On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)$.
Alors $Y = AX$ et $Z = BY$ donc $Z = BAX$.
La matrice d'une application linéaire dans des bases données est unique, donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = BA$.

Conséquence : la matrice d'un isomorphisme est inversible et son inverse est la matrice de l'endomorphisme réciproque.
En effet, supposons que u soit un isomorphisme, on note u^{-1} son isomorphisme réciproque.
Alors, $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{mat}(u) \times \mathrm{mat}(u^{-1}) = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}) = I$
Donc $\mathrm{mat}(u)$ est inversible et son inverse est $\mathrm{mat}(u^{-1})$: $\mathrm{mat}(u^{-1}) = \big(\mathrm{mat}(u)\big)^{-1}$.

Propriété de caractérisation des isomorphismes..

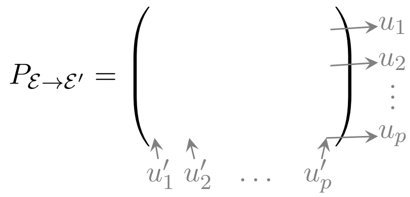
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note M sa matrice dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
u est un isomorphisme si et seulement si M est inversible.
Et alors, $\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = (\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u))^{-1}$.

II. Changement de base

1) Changement de coordonnées

Définition.

On dispose de deux bases de E :
$\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ (dénommée « ancienne base »)
et $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ (que l'on appellera « nouvelle base »).
Les vecteurs de $\mathcal{E}'$ se décomposent dans la base $\mathcal{E}$: $u'_1 = \sum_{k=1}^{p} a_{k,1} u_k$.
On appelle ***matrice de passage*** de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ la matrice $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1,p]\!]}$.
Autrement dit il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base, décomposés selon l'ancienne base.



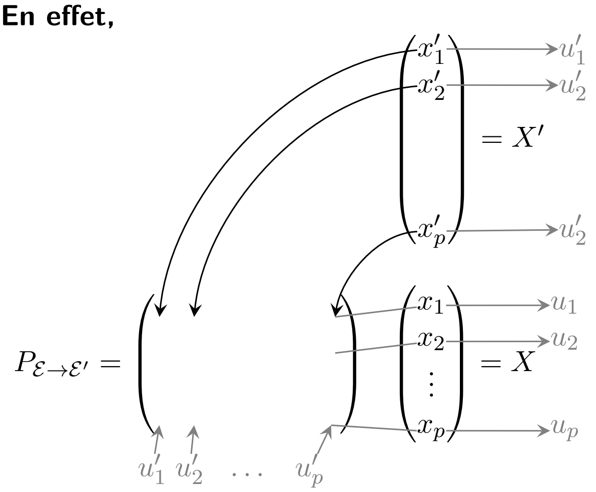
Remarque : cette matrice est en fait $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)$, elle est donc inversible, et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}'$ vers la base $\mathcal{E}$.

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$ on note $\mathcal{E}$ la base canonique $(1, X, X^2)$ et $\mathcal{E}'$ la base $(1, X-1, X^2-2X+1)$.
La matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété.

Soit x un vecteur de E, on note X (respectivement X') la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$).
On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$.
Alors $\boxed{X = PX' \text{ ou } X' = P^{-1}X}$.

En effet,



En fait,
$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{p} x'_k u'_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} x'_k \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,k} u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} x'_k a_{i,k} u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} x'_k a_{i,k} \right) u_i \end{aligned}$$
Donc $x_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x'_k$.

Suite de l'exemple : on donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on cherche les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - X + 3$ dans la base $\mathcal{E}'$.
On note U la matrice des coordonnées de Q dans la base canonique, et U' la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{E}'$.
Alors $U = PU'$ donc $U' = P^{-1}U$.
$U = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $U' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Autrement dit, $Q = 3 + (X-1) + 1(X^2 - 2X + 1)$ (c'est vrai !).

2) Changement de bases pour la matrice d'une application linéaire

Données : $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

E est de dimension p, deux bases : $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$
P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$

F est de dimension n, deux bases : $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $\mathcal{F}' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$
Q est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}'$.

$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f)$.

Lien entre A et A' : $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$.

Justification : soit $x \in E$: X la matrice de ses coordonnées dans $\mathcal{E}$, X' dans $\mathcal{E}'$.
On note $y = f(x)$ et Y la matrice des coordonnées de y dans $\mathcal{F}$, et Y' dans $\mathcal{F}'$.

Alors $X = PX'$ et $Y = QY'$.
Et $Y = AX$ et $Y' = A'X'$.
Donc $QY' = APX'$ soit $Y' = Q^{-1}APX'$.
Autrement dit $A' = Q^{-1}AP$. □

Cas particulier d'un endomorphisme : $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E et toujours P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$.
On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f)$ ($\mathcal{E}$ est la base de départ et d'arrivée), et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}'}(f)$.
Alors $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x, y, z)) = (2x + 2y + z; x + 3y + z; x + 2y + 2z)$.

a) Déterminer A, matrice de f dans la base canonique.
b) On donne $\mathcal{E}'$ la base formée de $u_1 = (2, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
Déterminer A', matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.

a) $f(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$ et $f(0, 1, 0) = (2, 3, 2)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$.
Donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) On note P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{E}'$, alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $A' = P^{-1}AP$.
On donne $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Alors on peut calculer $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
L'application f est très simple si on l'étudie dans la base $\mathcal{E}'$.

Définition.
Deux matrices carrées A et A' sont dites ***semblables*** si il existe une matrice P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

3) Matrices de projecteurs et symétries

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et F et G deux sous-espaces supplémentaires ($E = F \oplus G$), on note ℓ la dimension de F et m celle de G.
On note $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_\ell)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, g_2, \dots, g_m)$.
Alors $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_\ell, g_1, g_2, \dots, g_m)$ est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe.

On rappelle que le ***projecteur sur*** F ***parallèlement à*** G est l'application $p : \begin{array}{ccc} F \oplus G & \to & E \\ u_F + u_G & \mapsto & u_F \end{array}$.

La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \ell \text{ lignes de } \mathcal{B}_F \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \text{ lignes de } \mathcal{B}_G \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \dots\quad 0}}_{\mathcal{B}_F} \quad \underbrace{\hphantom{0\quad \dots\quad 0}}_{\mathcal{B}_G} & \end{array}$$

On peut aussi la noter $\begin{pmatrix} I_\ell & \mathbf{0}_{\ell,m} \\ \mathbf{0}_{m,\ell} & \mathbf{0}_{m,m} \end{pmatrix}$.

Et la ***symétrie par rapport à*** F ***dans parallèlement à*** G est l'application $s : \begin{array}{ccc} F \oplus G & \to & E \\ u_F + u_G & \mapsto & u_F - u_G \end{array}$.

La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \ell \text{ lignes de } \mathcal{B}_F \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \text{ lignes de } \mathcal{B}_G \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \dots\quad \dots}}_{\mathcal{B}_F} \quad \underbrace{\hphantom{\dots\quad \dots\quad \dots\quad 0}}_{\mathcal{B}_G} & \end{array}$$

On peut aussi la noter $\begin{pmatrix} I_\ell & \mathbf{0}_{\ell,m} \\ \mathbf{0}_{m,\ell} & -I_m \end{pmatrix}$.

III. Bilan sur le rang

Nous avons vu plusieurs autres notions de rang selon le contexte, mais elles se ramènent toutes à une matrice.

Le ***rang d'une famille de vecteurs*** est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)).$$

Le ***rang d'une application linéaire*** est la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ autrement dit } \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$$
(avec $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E)

Le ***rang d'une matrice*** est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice.
C'est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de sa matrice.
Ainsi, le ***rang d'une famille de vecteurs*** est aussi le rang de la matrice de ses vecteurs en colonnes.
Et le ***rang d'une application linéaire*** est aussi le rang de sa matrice.

Les deux caractéristiques précédentes sont valables dans n'importe quelles bases : voir propriété ci-dessous.

Propriété.
Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.
En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Pour déterminer le rang d'une matrice : on l'échelonne (par la méthode du pivot du Gauss) et on compte le nombre de pivots.

Par exemple : on détermine le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -15 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{aligned}$$

La matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée qui a 2 pivots.
Donc A est de rang 2 (donc n'est pas inversible).

Propriété.
Une matrice carrée de taille n et de rang n est inversible.

Le ***rang d'un système*** est le nombre de pivots (visible lorsque le système est échelonné).
C'est aussi le rang de la matrice associée au système.

Le ***rang d'une matrice*** A est aussi le rang du système $AX = 0$.

Remarque : le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes.