Applications linéaires A.

Exercice 1. Démonstration du théorème du rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie n. On note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1. Justifier que l'on peut trouver des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E.

2. Montrer que $f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que la famille $\big(f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)\big)$ est libre.

4. Conclure.

Exercice 2.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z, 1+y+z) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0, x^2, z-y) \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, x, x-2y) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

5. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP + P(1) \end{array}$

6. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \times P \end{array}$

7. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2\mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$ avec A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

8. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & y'' + 3y' - 2y \end{array}$

Exercice 3.

On note $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(2)X + P(5) \end{cases}$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que f est surjective.

Exercice 4.

Dans chacune des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application et préciser si elle est injective, surjective, bijective. On justifiera que f_1 et f_6 sont linéaires, pour les autres c'est admis.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_1(x,y) = (4x - 3y, 5x + 4y, x - y)$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $f_2(x,y,z) = (6x - 4y + z, 9x - 6y)$

3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_3(x,y) = (x,x,x)$

4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_4(x,y,z) = (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z)$.

5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_5(x,y,z) = (x + z, y - 2x, x + 3z)$

6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f_6(x,y) = 4x - 7y$.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - 2P \end{cases}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire le rang de f.

3. Donner alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base.

Exercice 6.

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 3z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$.

1. Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de chacun.

2. Soit f le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer $f(1,2,0)$.
Soit g la symétrie autour de F parallèlement à G. Déterminer $g(1,2,0)$.

Exercice 7.

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y; -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)$.
Justifier que f est un projecteur, et déterminer l'espace sur lequel il projette et sa direction.

2. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y; -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$.
Justifier que g est une symétrie (et déterminer les espaces caractéristiques).