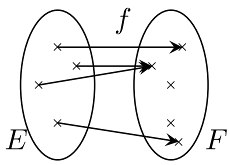
Applications linéaires A.

Rappels : f est une application de E dans F :



⋆ Soit $A \subset E$: l'***image de** A **par*** f est un ensemble, noté $f(A)$, défini comme $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$.
C'est une partie de F.

⋆ Soit $B \subset F$: l'***image réciproque de** B **par*** f est un ensemble, noté $f^{-1}(B)$.
Il est défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$. C'est une partie de E.

⋆ f est ***injective*** signifie : tout élément de F admet au maximum un antécédent par f dans E.
Autrement dit : $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

⋆ f est ***surjective*** signifie : tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E.
Autrement dit : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.

⋆ f est ***bijective*** signifie que f est injective et surjective.
Autrement dit : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E, f(x) = y$.

I. Généralités

1) Définitions

Définition.
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F.
On dit que f est une ***application linéaire*** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
⋆ $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$;
⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$. (conséquence : $f(0) = 0$)
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Une application linéaire est aussi appelée ***morphisme d'espaces vectoriels***.

Propriété.
Soit f une application de E dans F.
f est une application linéaire si et seulement si $\forall (u, v) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

Exemple : f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f\big((1, 0)\big) = -2$ et $f\big((0, 1)\big) = 4$.
Alors $f\big((2, 3)\big) = f\big(2(1, 0) + 3(0, 1)\big) = 2f\big((1, 0)\big) + 3f\big((0, 1)\big) = 2 \times (-2) + 3 \times 4 = -4 + 12 = 8$
$f\big((0, -5)\big) = -5f\big((0, 1)\big) = -20$
$f\big((x, y)\big) = f\big(x(1, 0) + y(0, 1)\big) = -2x + 4y$.

Vocabulaire :
- une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est une ***forme linéaire*** ;
- une application linéaire de E dans E est un ***endomorphisme de*** E,
  on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ;
- une application linéaire bijective de E dans F est un ***isomorphisme***,
  si une telle application existe, on dit que E et F sont ***isomorphes*** ;
- une application linéaire bijective de E dans E est un ***automorphisme de*** E,
  on appelle ***groupe linéaire*** et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

2) Exemples classiques

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

  En effet, $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q)' = X(P' + \lambda Q') = XP' + \lambda XQ' = f(P) + \lambda f(Q)$.

- $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + 2y \end{array} \right.$ est une forme linéaire, en effet :

  soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et λ un réel, $\begin{aligned} g(u + \lambda v) &= g\big((x + \lambda x', y + \lambda y')\big) \\ &= (x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') \\ &= x + 2y + \lambda x' + 2\lambda y' \\ &= x + 2y + \lambda(x' + 2y') \\ &= g(u) + \lambda g(v) \end{aligned}$

- $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ est linéaire.

  En effet, $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, h(X+\lambda Y) = A(X+\lambda Y) = AX+A\lambda Y = AX+\lambda AY = h(X)+\lambda h(Y)$.
  Cette application a déjà été vue dans le chapitre sur les matrices : c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

- $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$ est une forme linéaire.

  Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$, et λ un réel, alors :
  $k(f + \lambda g) = \displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = k(f) + \lambda k(g)$.

- $l : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy + 5y \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

  $l\big((1, 2) + (-3, 1)\big) = l(-2, 3) = -2 \times 4 + 5 \times 3 = 7$
  $l(1, 2) + l(-3, 1) = 1 \times 2 + 5 \times 2 + (-3) \times 2 + 5 \times 1 = 10 - 1 = 9$
  $l\big((1, 2) + (-3, 1)\big) \neq l(1, 2) + l(-3, 1)$ donc l n'est pas linéaire.

Méthode : pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire :
« Soient u et v dans E, et λ dans $\mathbb{K}$:
$f(u + \lambda v) = \ldots = \ldots\ldots = f(u) + \lambda f(v)$ »

Définition.

L'***application identité de*** E notée Id_E est définie par $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$

$\boxed{\text{L'application identité est un automorphisme de } E.}$

En effet, elle est linéaire car $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{Id}_E(x + \lambda y) = x + \lambda y = \mathrm{Id}_E(x) + \lambda \mathrm{Id}_E(y)$;
elle est injective : $\forall (x, x') \in E^2$, si $\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E(x')$, alors $x = x'$;
elle est surjective : $\forall y \in E$, $\mathrm{Id}_E(y) = y$ donc y a un antécédent, lui même.

3) Noyau et image

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- On appelle ***image de*** f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'espace-vectoriel $f(E)$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \,|\, x \in E\}$.
- On appelle ***noyau de*** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'espace vectoriel $f^{-1}(\{0\})$,
  c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0\}$.

Méthode : on peut utiliser le noyau ou l'image pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.
Par exemple, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car c'est $\mathrm{Ker}(g)$.

Exemples :

- avec $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$

  $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, XP' = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P' = 0\} = \mathbb{R}_0[X]$.

  $\mathrm{Im}(f) = \{\text{multiples de } X\}$, en effet :
  ⋆ $\mathrm{Im}\,(f) \subset \{\text{multiples de } X\}$ car si P dans $\mathrm{Im}\,(f)$, alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = f(Q)$ soit $P = XQ'$.
  ⋆ $\{\text{multiples de } X\} \subset \mathrm{Im}\,(f)$: soit Q un multiple de X, alors Q s'écrit $Q = XQ_1$, on note P un polynôme primitive de Q_1, alors $Q = XP' = f(P)$, donc $Q \in \mathrm{Im}\,(f)$.

- avec $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+2y \end{array} \right.$

  $\mathrm{Ker}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y = 0\} = \{(2y,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((2,1))$.
  Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est la droite vectorielle dirigée par $(2,1)$.
  $\mathrm{Im}\,(g)$ est $\mathbb{R}$: en effet, pour tout z de $\mathbb{R}$, $g(z,0) = z$ donc $(z,0)$ est un antécédent de z.
  Autrement dit, g est surjective.

Propriété : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

Démonstration :

- injectivité :
  ⋆ ≪ ⇒ ≫ supposons f injective, et montrons qu'alors $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
  $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$ et $\mathbf{0}_F$ ne peut pas avoir plus qu'un antécédent car f est injective, donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
  ⋆ ≪ ⇐ ≫ supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, montrons qu'alors f est injective.
  Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$, montrons que $x = x'$.
  $f(x) = f(x')$ donc $f(x) - f(x') = \mathbf{0}_F$ soit $f(x - x') = \mathbf{0}_F$ (car f est linéaire),
  donc, $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$ donc par hypothèse, $x - x' = \mathbf{0}_E$.
  Donc $x = x'$.
  Donc f est injective.

- surjectivité :
  f surjective $\iff \forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y \iff \forall y \in F,\ y \in \mathrm{Im}(f) \iff F = \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(F) \subset F$).

Exemple : montrons que l'application linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est surjective et non injective.

⋆ $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, en notant $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ vérifie $P' = Q$ donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$ donc f est surjective.
⋆ le polynôme 1 est dans $\mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au polynôme nul, donc f n'est pas injective.

4) Opérations sur les applications linéaires

Propriété.

- Une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire :
  si f et g sont dans $\mathcal{L}(E,F)$ et λ et μ dans $\mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$.
  (autrement dit, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
  Si, de plus, f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ aussi.
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$, alors sa réciproque f^{-1} est dans $\mathcal{L}(F,E)$ et est un isomorphisme.
  De plus, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

II. Applications linéaires et dimension finie

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Propriété.

L'image par l'application linéaire f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
En particulier on déduit que si E est de dimension finie, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie aussi.

Exemple : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

$(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, donc $(0, 1, 2X, 3X^2)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
Or $\text{Vect}\big(0, 1, 2X, 3X^2\big) = \text{Vect}\big(1, X, X^2\big)$ et ces trois polynômes sont de degrés différents donc ils forment une famille libre.
Donc une base de $\text{Im}(f)$ est $(1, X, X^2)$.

1) Images d'une base

Théorème.

Une application linéaire est déterminée de manière unique par les images des vecteurs d'une base.
Autrement dit, si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E, et si $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ sont des vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(u_k) = v_k$.

Exemples :

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X])$.
  On sait que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k) = 3X^{k+1}$.
  Alors $$\begin{aligned} f(8X^2 - 7X + 4) &= 8f(X^2) - 7f(X) + 4f(1) \\ &= 8 \times 3X^3 - 7 \times 3X^2 + 4 \times 3X \\ &= 24X^3 - 21X^2 + 12X \end{aligned}$$
- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = (1, 3, 1)$, $f(e_2) = (0, 0, 0)$ et $f(e_3) = (-2, 1, 0)$.
  Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $$\begin{aligned} f\big((x, y, z)\big) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1, 3, 1) + y(0, 0, 0) + z(-2, 1, 0) \\ &= (x, 3x, x) + (0, 0, 0) + (-2z, z, 0) \\ &= (x - 2z, 3x + z, x) \end{aligned}$$

Propriété.

On note $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :
- f est injective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F ;
- f est surjective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F ;
- f est bijective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une base de F ;

Démonstration :

- injectivité :
  ⋆ « ⇒ » supposons que f soit injective, montrons que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F.
  Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p)) = \mathbf{0}_F$.
  Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.
  Par linéarité de f, $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p)$.
  Donc $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p) = \mathbf{0}_F$ c'est-à-dire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \in \text{Ker}(f)$.
  Or f est injective, donc $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \mathbf{0}_E$.
  Or $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E donc une famille libre.
  Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.
  Donc la famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est libre. □

⋆ « $\Leftarrow$ » supposons que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ soit une famille libre de F, montrons que f est injective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, montrons que $x = \mathbf{0}_E$.
$x \in E$ donc x se décompose dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$, on note $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$.
Alors $f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p)$ (linéarité)
et $f(x) = \mathbf{0}_F$ (x est dans le noyau).
Donc $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p) = \mathbf{0}_F$.
La famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ étant libre, cela entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, donc $x = \mathbf{0}_E$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, donc f est injective. □

- surjectivité : $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E donc $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Ainsi, $$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \mathrm{Im}(f) = F \\ &\iff \mathrm{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)) = F \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)) \text{ génératrice de } F \end{aligned}$$ □

- bijectivité : $$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\iff f \text{ surjective et injective} \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)) \text{ génératrice de } F \text{ et libre} \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)) \text{ base de } F \end{aligned}$$

Théorème.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemples : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$ sont isomorphes, tout comme $\mathbb{R}_7[X]$ et $\mathbb{R}^8$, ou encore $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ...

2) Rang d'une application linéaire et ses propriétés

Définition.

Le ***rang*** d'une application linéaire est la dimension de son image :
si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E.
Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$. (*rang d'une famille de vecteurs*)

En effet, $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ étant une base de E, $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
Donc $rg(f) = \dim(\mathrm{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))) = \mathrm{rg}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$. (définition du rang d'une famille de vecteurs)

Théorème du rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration : voir exercice 1.

Propriété : conséquence du théorème du rang.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors :
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ injective.}$$

Preuve : $\dim(E) = \dim(F)$, donc d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

⋆ Ainsi, si f est injective, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, or $\mathrm{Im}(f) \subset (F)$ donc avec égalité des rangs, $\mathrm{Im}(f) = F$, donc f est surjective, donc bijective.

⋆ De même, si f est surjective, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbf{0}_E$ donc f est injective.

Méthode : pour montrer qu'une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer
- SOIT : $\dim(E) = \dim(F)$ ET f est injective (avec $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$) ;
- SOIT : $\dim(E) = \dim(F)$ ET f est surjective.

Exemple : Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.

On définit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)) \end{cases}$.

Montrons que ϕ est un isomorphisme.

$\star$ $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$.

$\star$ Montrons que ϕ est injective.

Soit P dans $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Alors $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0$. Donc P a n racines distinctes.

Or P est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Donc $P = 0$.

Donc ϕ est injective.

Donc ϕ est un isomorphisme.

Propriété.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
- Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
- Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

III. Endomorphismes remarquables

1) Projecteur

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G des sous-espaces supplémentaires : $E = F \oplus G$.

Autrement dit : $\forall u \in E, \quad \exists!(u_F, u_G) \in F \times G, \quad u = u_F + u_G$.

Alors on appelle ***projecteur sur*** F ***parallèlement à*** G l'application p qui à u associe u_F.

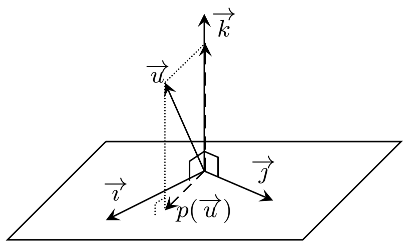
Propriété.

Un projecteur défini sur E est un endomorphisme de E. (application linéaire)

Exemple : on note $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$.

Alors p est le projecteur sur le plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ parallèlement à la droite dirigée par $\overrightarrow{k}$.



Propriété.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$:

$\star$ si p un projecteur, alors $p \circ p = p$;

$\star$ si $p \circ p = p$, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exemple : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) \end{cases}$.

Montrer que f est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques.

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
$$\begin{aligned} p \circ p(x,y) &= \tfrac{1}{3} p(-x+2y, -2x+4y) \\ &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3}\big(-(-x+2y) + 2(-2x+4y), -2(-x+2y) + 4(-2x+4y)\big) \\ &= \tfrac{1}{9}(-3x+6y, -6x+12y) \\ &= \tfrac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) \\ &= p(x,y) \end{aligned}$$

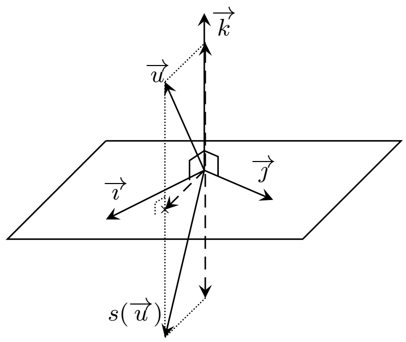
Donc $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

- $p(x,y)=(0,0) \Longleftrightarrow (-x+2y,-2x+4y)=(0,0) \Longleftrightarrow x=2y$
  Donc $\mathrm{Ker}(p)$ est la droite dirigée par le vecteur $(2,1)$.
- $\mathrm{Im}(p)=\left\{\frac{1}{3}(-x+2y,-2x+4y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\frac{1}{3}(-1,-2)+y\frac{1}{3}(2,4) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$
  Donc $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}\left((-1,-2),(2,4)\right)=\mathrm{Vect}\left((1,2)\right)$.
- Donc p est le projecteur sur la droite dirigée par $(1,2)$ et parallèlement à la droite dirigée par $(2,1)$.

2) Symétrie

Définition.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G des sous-espaces supplémentaires.
Ainsi, $\forall u\in E,\ \exists!(u_F,u_G)\in F\times G,\ u=u_F+u_G$.
On appelle ***symétrie par rapport à*** F ***parallèlement à*** G l'application $u\mapsto u_F-u_G$.

Propriété.
Une symétrie est un automorphisme de E. (application linéaire bijective)



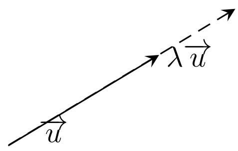
Exemple : on note $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit s : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,-z)\end{array}$.

Alors s est la symétrie d'axe $\overrightarrow{k}$ par rapport au plan $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

Propriété.
Soit $s\in\mathcal{L}(E)$:
⋆ si s est une symétrie alors $s\circ s=\mathrm{Id}_E$;
⋆ si $s\circ s=\mathrm{Id}_E$, alors $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

3) Homothéties vectorielles

Définition.
Soit λ un scalaire.
L'***homothétie*** de rapport λ est l'endomorphisme de E défini par $h_\lambda : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u\end{array}\right.$.



IV. Équations linéaires

Une équation d'inconnue $x\in E$ est dite linéaire si elle est de la forme $f(x)=b$ avec $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $b\in F$.

Exemples :

- $y''+2y'-3y=e^{2t}$ d'inconnue y, fonction de $E=\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

  Alors f : $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & u''+2u'-3u\end{array}$ f est linéaire, et l'équation devient $f(y)=e^{2t}$.

- $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+7z & = & 6 \\ 11x-y+z & = & -5\end{array}\right.$

  Ce système est une équation de la forme $f(u)=b$ d'inconnue $u=(x,y,z)$ avec
  f : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x+7z,11x-y+7)\end{array}$ et $b=(6,-5)$.

Structure de l'ensemble des solutions : avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et l'équation $f(x) = b$.

⋆ si $b = 0$, l'ensemble solution est $f^{-1}(\{0\})$ c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f)$;

⋆ si $b \neq 0$, et si $b \in \mathrm{Im}(f)$, alors b a un antécédent x_0 par f,

alors
$$\begin{aligned} x \text{ est solution} &\iff f(x) = b \\ &\iff f(x) = f(x_0) \\ &\iff f(x - x_0) = 0 \\ &\iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

Ainsi, toute solution s'écrit $x = x_0 + u$ avec x_0 solution particulière et $u \in \mathrm{Ker}(f)$ (solution de l'équation homogène associée).

⋆ si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, alors l'équation n'a pas de solution.

Suite de l'exemple : résolution de $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$.

⋆ équation homogène : l'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16$ donc $r_1 = -3$ et $r_2 = 1$.
On note $y_1 : t \mapsto e^{-3t}$ et $y_2 : t \mapsto e^t$.
Alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{\lambda y_1 + \mu y_2 \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
traduction algébrique : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2)$, car $\mathrm{Ker} f = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$

⋆ solution particulière : recherche sous la forme $y(t) = Ce^{2t}$
$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = (4C + 4C - 3C)e^{2t} = 5Ce^{2t}$.
Donc avec $C = \frac{1}{5}$, on définit $y_0(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$, y_0 est une solution particulière de l'équation.
traduction algébrique : $f(y_0) = b$.

⋆ $\mathcal{S} = \{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2 \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
traduction algébrique : y_0 solution particulière, et $\lambda y_1 + \mu y_2$ in $\mathrm{Ker}(f)$.